

# Feuille d'exercices n°1 : trigonométrie, révisions

**Exercice 1.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  : a)  $\sin(x) = \sin(2x)$                       b)  $\cos(x) = \cos(2x)$   
 c)  $\cos(x) = \cos(5x)$                       d)  $\cos(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$                       e)  $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$

**Exercice 2.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , écrire  $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$  sous forme de produit.

**Exercice 3.** a) Exprimer pour  $x \in \mathbb{R}$  :  $\cos(5x)$  en fonction de  $\cos(x)$   
 b) Déterminer  $\cos(\frac{\pi}{10})$

**Exercice 4.** Calculer en fonction de  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  la somme :  $S = \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$

**Exercice 5.** (★)

Soit  $(a, b, c) \in [0; \pi]^3$  tel que  $a + b + c = \pi$ .

On pose  $S = \sin^2(a) + \sin^2(b) + \sin^2(c)$

a) Montrer que :  $S = 2 - \cos^2(a) + \cos(a)\cos(b - c)$

b) Montrer que :  $S \leq \frac{9}{4}$  avec égalité si et seulement si  $a = b = c = \frac{\pi}{3}$

**Exercice 6.** (★) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$

**Exercice 7.** Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \ 10^n - (-1)^n$  est divisible par 11

**Exercice 8.** Démontrer que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel.

**Exercice 9.** Résoudre :  $ch(x) = 2$

**Exercice 10.** On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique et que  $u_5 = 13$  et  $u_9 = 25$ .  
 Calculer, pour  $k \in \mathbb{N}$   $\sum_{k=0}^n u_k$ .

**Exercice 11.** a) Montrer que :  $\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$  et en déduire  $\sum_{k=0}^n k$

b) Montrer que :  $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$  et en déduire  $\sum_{k=0}^n k^2$

c) En simplifiant  $(k+1)^4 - k^4$  et en utilisant le a) et le b), calculer  $\sum_{k=0}^n k^3$

**Exercice 12.** Calculer pour  $n \in \mathbb{N}^*$  la somme  $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)}$

**Exercice 13.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $x^2 + 3ix - 3 + i = 0$

**Exercice 14.** Soit  $u_0 \in ]0; +\infty[$ . On pose  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ . Etudier  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Exercice 15.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  : 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } e^x + 1 = \exp(x + 1) \\ \text{b) } x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0 \\ \text{c) } 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0 \\ \text{d) } \sin(x) = 1 + \ln(x + 1) \end{array} \right.$$

**Exercice 16.** Trouver les polynômes  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$  de degré 5, sachant que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X + 1)^3$  vaut  $-5$  et que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - 1)^3$  vaut 11.