Pour le jeudi 19 septembre 2025

Devoir à la maison n°1 de Mathématiques

Exercice : CCP 2013 TSI - exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{12} - x + 1$.

1. **a)** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f.

2. **a)** Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$ avec $\beta < \gamma$.

b) Simplifier l'expression $1 + \dfrac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).

c) À l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $\left]1\,;\,1{,}2\right[$ et que γ appartient à $\left]2{,}7\,;\,2{,}8\right[$.

d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, +\infty[$.

4. On cherche à obtenir une approximation de β. À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^3}{12}. \end{cases}$$

a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0, \beta]$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.

Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

d) Écrire dans le langage de votre choix (MAPLE, MATHEMATICA ou autre) un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N.

Problème : Alès, Douai, Nantes 2009 Pb2

Dans tout ce problème, on notera sh la fonction sinus hyperbolique, ch la fonction cosinus hyperbolique et th la fonction tangente hyperbolique.

A. Etude d'une fonction
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Etudier la parité de f.

2. **(a)** Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Déterminer la limite de f en 0.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{th}(X) < X$.

5. En déduire le tableau de variations de f.

6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}(X)}{X}$.

7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

où $a_0, \ldots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F, puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

C. Une équation différentielle
On considère l'équation différentielle (E) suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \mathrm{ch}(x). \qquad (E)$$

12. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E).

13. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.

14. Justifier que la fonction F (définie dans la question A.8.) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

D. Etude d'une suite

15. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

16. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

17. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

18. En utilisant la question A.7., déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

E. Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$.

19. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)$.

20. Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

21. En déduire le signe de J' sur $\mathbb{R}_+^*$; on exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction ln.

22. *On admet les résultats suivants :*

$(*)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} J(x) = +\infty$,

$(*)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} J(x) = +\infty$ *et J admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{x}{2}$,*

$(*)$ *la courbe représentative de J est toujours "au dessus" de l'asymptote précédente.*

Donner le tableau de variations de J sur $\mathbb{R}_+^*$.

23. Tracer l'allure de la courbe représentative de J.

On donne pour le tracé : $\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0,76$ *et* $J\left(\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ *à* 10^{-2} *près.*

Problème Bonus : Equations du troisième degré Méthode de Tartaglia (ou de Cardan)

Le but de ce problème est la résolution d'équation du troisième degré à coefficients réels.

Partie I : Résolution générale d'un cas particulier

Dans cette partie p et q sont deux nombres réels quelconques et on considère l'équation, d'inconnue z complexe, suivante :

$$(1) \Leftrightarrow z^3 + pz + q = 0$$

On posera $j = exp(\frac{2i\pi}{3})$

1°) *Préliminaires*

a) Montrer que : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $j^2 = \overline{j}$

b) Montrer que si $U \in \mathbb{R}$ l'équation, d'inconnue u : $u^3 = U$ admet une unique solution réelle. On notera $\sqrt[3]{U}$ cette solution.

c) Montrer que si $U \in \mathbb{C}$, $u_0 \in \mathbb{C}$ tels que $u_0^3 = U$ alors : $u^3 = U \Leftrightarrow u \in \{u_0, ju_0, \overline{j}u_0\}$

d) Montrer que si $U \in \mathbb{R}$ alors : $u^3 = U \Leftrightarrow u \in \{\sqrt[3]{U}, j\sqrt[3]{U}, \overline{j}\sqrt[3]{U}\}$

2°) *Première étape*

On cherche à écrire les solutions de (1) sous la forme $u+v$
On suppose donc que $z_0 = u+v$ est solution de (1)

a) Montrer, sans chercher à les calculer, qu'il existe deux complexes u et v tels que : $\begin{cases} u+v = z_0 \\ uv = \frac{-p}{3} \end{cases}$

b) Montrer que l'on a alors : u^3 et v^3 qui sont solutions de l'équation d'inconnue X suivante :

$$(2) \Leftrightarrow X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

c) Montrer que le discriminant de (2) est $\Delta = \frac{4p^3+27q^2}{27}$

3°) *Etude du cas* $\Delta > 0$

On suppose dans ce 3°) que $\Delta > 0$ et on note U et V les deux solutions réelles de (2)

Montrer alors que (1) admet trois solutions, une réelle et deux conjuguées, que l'on exprimera à l'aide de $\sqrt[3]{U}$, $\sqrt[3]{V}$, j et $\overline{j}$

4°) *Etude du cas* $\Delta < 0$

On suppose dans ce 4°) que $\Delta < 0$.

a) Montrer que (2) admet deux solutions complexes conjuguées distinctes que l'on notera U et $\overline{U}$

b) Montrer que (1) admet alors trois solutions réelles que l'on exprimera à l'aide de u_0 une solution particulière de $u^3 = U$

5°) *Etude du cas* $\Delta = 0$

On suppose dans ce 5°) que $\Delta = 0$.

a) Montrer que (2) admet une racine double, notée U, que l'on exprimera à l'aide de q

b) Montrer que (1) admet alors deux solutions réelles que l'on exprimera à l'aide de q

6°) *Bilan*

Faire le bilan de cette partie I

Partie II : Cas général

On considère l'équation suivante :

$$(3) \Leftrightarrow z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et d'inconnue z.

7°) Montrer que l'on peut trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que le changement de variable $z = Z + a$ ramène (3) à une équation de type (1)

Partie III : Exemples

8°) Résoudre : $z^3 - 12z - 65 = 0$

9°) Résoudre : $z^3 - 12z - 16 = 0$

10°) *(Difficile)* Résoudre : $z^3 - 9z^2 + 18z + 2\sqrt{2} = 0$

Partie IV : Retour sur le nombres de solutions réelles

Cette partie est indépendante, on n'utilisera pas les résultats des parties précédentes.

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^3 + px + q$

11°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

12°) Dresser le tableau de variation de f en distinguant plusieurs cas selon p.

13°) Déterminer, selon le signe de $\delta = 4p^3 + 27q^2$, le nombre de solution de $f(x) = 0$