Feuille d'exercices n°2 : Chapitre 1

Exercice 17. *Si A est une partie de $\mathbb{R}$ on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A. Déterminer $\overline{A}$ dans les cas suivants :*

a) $A =]-1;1[$ *b)* $A =]0;1[\cup]1;+\infty[$ *c)* $A = \mathbb{N}$
d) $A = \mathbb{D}$ *e)* $A = \mathbb{Q}$ *f)* $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
g) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]sin(\frac{1}{n}); 1 + cos(\frac{1}{n})[$

Exercice 18. *Si C est une partie de $\mathbb{R}$ alors on note $\overline{C}$ l'ensemble des points adhérents de C*
a) *Montrer que si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ alors : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$*
b) *Ecrire la réciproque et montrer qu'elle est fausse.*
c) *Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*

Exercice 19. *(Sommes)*
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $A(x) = exp(-x) + sin(x)$.
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $B(x) = ln(1 + x^2) - cos(x)$.

Exercice 20. *produits*
Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $C(x) = exp(x)\sqrt{1 + x}$
Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $D(x) = (1 + x)^{\frac{1}{3}}cos(x)$

Exercice 21. *inverses*
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $E(x) = \frac{1}{1-x}$
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $F(x) = \frac{1}{1+x-2x^2}$
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $G(x) = \frac{1}{1+e^x}$

Exercice 22. *composées*
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $H(x) = \int_0^x sin(ln(1 + t))dt$.
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $I(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 23. *ailleurs qu'en zéro...*
Donner le développement limité à l'ordre 3 en -1 de : $J(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$.
Donner le développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$ de : $K(x) = tan(x)$.
Donner le développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ de : $L(x) = \sqrt{1 - x + x^2}$.

Exercice 24. *Montrer que :*
a) $tan(x^2) = o(x)$ au voisinage de 0.
b) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+x^2} = O(\frac{1}{x})$ au voisinage de $+\infty$.
c) $ln(sin(x)) \sim ln(x)$ au voisinage de 0

Exercice 25. *Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.*

Exercice 26. $\star$
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x - ln(x) = n$ admet une unique solution, notée u_n, sur $[1; +\infty[$
b) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$: $u_n = n + ln(n) + o(\frac{ln(n)}{n})$