# Chapitre 1 (et 0) : Exemples d'exercices corrigés

## Enoncé exercice 1.1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue $x$ : $cos(2x) = sin(x + \frac{\pi}{4})$

## Correction

$cos(2x) = sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow sin(2x + \frac{\pi}{2}) = sin(x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \\ 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - (x + \frac{\pi}{4}) + 2k'\pi \ , k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k'\pi}{3} \ , k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation cherchée est donc $S = \{\frac{-\pi}{4} + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + \frac{2k'\pi}{3} \ , k' \in \mathbb{Z}\}$

## Enoncé exercice 1.2

Linéariser $cos^3(x)$

## Correction

$cos^3(x)$

$= (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3$

$= \frac{1}{8}((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3) = \frac{1}{8}((e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{8}(2cos(3x) + 3 \times 2cos(x))$

On a donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \ cos^3(x) = \frac{cos(3x)+3cos(x)}{4}}$

## Enoncé exercice 1.3

Effectuer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+sin(x)}$

## Correction

Au voisinage de 0 : $\frac{1}{1+sin(x)}$

$= \frac{1}{1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$

$= 1 - (x - \frac{x^3}{6}) + (x - \frac{x^3}{6})^2 - (x - \frac{x^3}{6})^3 + o(x^3) = 1 - (x - \frac{x^3}{6}) + (x^2) - (x^3) + o(x^3) = 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$

Au voisinage de 0, on a donc : $\boxed{\frac{1}{1+sin(x)} = 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + o(x^3)}$

# Enoncé exercice 1.4

Soit $f$ une fonction continue d'un segment $I = [a; b]$ non vide $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(I) \subset I$. Montrer qu'il existe $c \in I$ , $f(c) = c$

# Correction

On pose $\forall x \in I$ , $g(x) = f(x) - x$, alors $g$ est continue comme composée de fonctions continues.
$g(a) = f(a) - a \geq 0$ puisque $f(a) \in I = [a; b] \Rightarrow f(a) \geq a$
$g(b) = f(b) - b \leq 0$ puisque $f(b) \in I = [a; b] \Rightarrow f(b) \leq b$

On a donc $g(a)g(b) \leq 0$ et comme $g$ est continue sur $I$ alors $\exists c \in I$ , $g(c) = c \Leftrightarrow f(c) = c$

# Enoncé exercice 1.5

Etudier la fonction $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{1+e^x}$ et tracer sa représentation graphique $\Gamma_f$

# Correction

On commence par remarque que le **domaine de définition** de $f$ est $\mathbb{R}$ et que $f$ est $C^\infty$ sur son domaine.
On a a alors :
$f'(x) = \frac{[(x-2)e^x+e^x](1+e^x)-e^x(x-2)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}[(x-1)(1+e^x) - (x-2)e^x] = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}(x - 1 + e^x)$

On remarque que $f'(x)$ est du même signe que $\theta(x) = e^x + x - 1$

$\theta$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\theta'(x) = e^x + 1 > 0$ donc $\theta$ est croissante. On a alors, puisque $\theta(0) = 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\theta(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $\theta(x)$ | | - | $0$ | $+$ | |

D'où le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On peut alors dire, avec le tableau de variation que :
$\Gamma_f$ admet une tangente horizontale au point $(0;-1)$
$\Gamma_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $-\infty$

**Etude approfondie en $+\infty$ :**

Au voisinage de $+\infty$ : $f(x)=\frac{(x-2)e^x}{1+e^x}\sim\frac{(x-2)e^x}{e^x}=x-2$

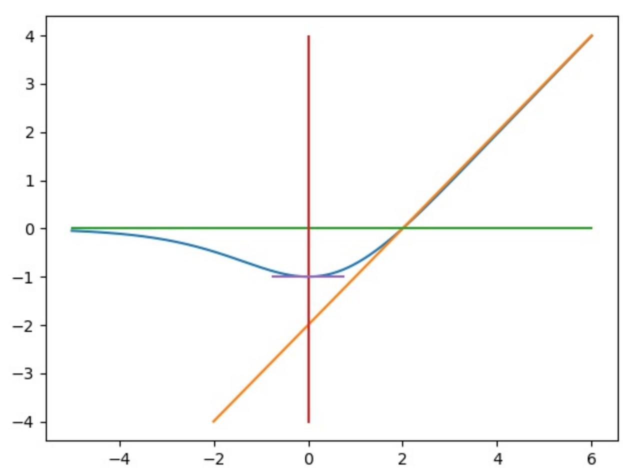
On peut alors étudier $f(x)-(x-2)=\frac{(x-2)e^x}{1+e^x}-(x-2)=\frac{(x-2)e^x-(x-2)(1+e^x)}{1+e^x}=\frac{2-x}{1+e^x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$
La courbe $\Gamma_f$ se rapproche donc de la droite d'équation $y=x-2$ au voisinage de $+\infty$. On dit que cette droite est asymptote oblique à $\Gamma_f$ en $+\infty$
De plus $f(x)-(x-2)=\frac{2-x}{1+e^x}\begin{cases}>0 \text{ si } x<2\\ <0 \text{ si } x>2\end{cases}$
Donc $\Gamma_f$ au dessus de $y=x-2$ sur $]-\infty;2]$ et $\Gamma_f$ au dessous de $y=x-2$ sur $]2;+\infty[$

On peut maintenant tracer la courbe avec Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    e=np.exp(x)
    return (x-2)*e/(1+e)

X=np.linspace(-5,6,500) # création des abscisses
Y=[f(x) for x in X] # création des ordonnées
plt.plot(X,Y) # tracé de Gamma_f
plt.plot([-2,6],[-4,4]) # tracé de l'asymptote
plt.plot([-5,6],[0,0]) # tracé de l'axe des x
plt.plot([0,0],[-4,f(6)]) # tracé de l'axe des y
plt.plot([-0.75,0.75],[-1,-1]) # tracé de la tangente horizontale
plt.show()
```



# Enoncé exercice 1.6

Etude en 0 de $\begin{array}{cccc} f & : & [-1;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & arcsin(1-x^2) \end{array}$

---

# Correction

• : Rappelons que $arcsin$ est définie sur $[-1;1]$, continue sur sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$ avec $\forall u \in ]-1;1[\ ,\ arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

Comme $x \mapsto 1-x^2$ est $C^\infty$ sur $[-1;1]$ et envoie $[-1;1]$ sur $[0;1] \subset [-1;1]$ alors, par composition $f$ est continue sur $[-1;1]$

$1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ donc, comme $x \mapsto 1-x^2$ envoie $[-1;1]\backslash\{0\}$ sur $[0;1[ \subset ]-1;1[$ alors, par composition $f$ est dérivable sur $[-1;1]\backslash\{0\}$

• Sur $[-1;1]\backslash\{0\}$ on a : $f'(x) = (-2x)\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$

Consdérons $g$ la restriction de $f$ à $[0;1]$, alors $g$ est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1]$ et
$\forall x \in ]0;1]\ ,\ g'(x) = \frac{-2x}{x\sqrt{2-x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\sqrt{2}$

Par le théorème de prolongement de la fonction dérivée, on en déduit $g$ dérivable en 0 et $g'(0) = -\sqrt{2}$
En revenant à $f$ on a $\boxed{f \text{ dérivable à droite en 0 et } f'_d(0) = -\sqrt{2}}$
Comme $f$ est paire (ou en appliquant le même raisonnement, on a $\boxed{f \text{ dérivable à gauche en 0 et } f'_g(0) = \sqrt{2}}$
Comme $f'g(0) \neq f'_d(0)$ alors $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 0.}}$

---

# Enoncé exercice 1.7

Déterminer, sur son domaine, une primitive de $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

---

# Correction

On remarque que : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ donc le domaine de $f$ est $D = \mathbb{R}\backslash\{1;2\}$
Pour $x \in D$ on a : $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \Leftrightarrow x+1 = a(x-2) + b(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2a - b \\ 1 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$

Donc sur $D$, $f(x) = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$ et
$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } D \text{ est par exemple : } F(x) = -2ln(|x-1|) + 3ln(|x-2|)}$