Feuille d'exercices n°5 : Chapitre 1

Exercice 47. $\star$ **Intégrales de Wallis**

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$ *et* $J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt$.

a) *Montrer à l'aide d'un bon changement de variable que* $\forall n \in \mathbb{N}\quad I_n = J_n$.
b) *Montrer que la suite* (I_n) *est décroissante, puis qu'elle est convergente.*
c) *Calculer les valeurs de* I_0 *et* I_1.
d) *Déterminer une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n-2}.
e) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}\quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$
f) *Déterminer une expression de la même forme pour* I_{2n+1}.
g) *Montrer que :* $I_{n+1} \sim I_n$
h) *Montrer que la suite définie par* $\theta_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ *est une suite constante.*
i) *Déterminer un équivalent simple de* I_n *en* $+\infty$ *et en déduire la limite de* (I_n).

Exercice 48. Lebesgue

Soit f *une fonction de classe* C^1 *sur un segment* $[a;b]$. *Montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b sin(nx)f(x)dx = 0$

Exercice 49. Formule de la moyenne
Soit $f \in C^0([a;b])$. *Montrer que :* $\exists c \in]a;b[\quad \int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$

Exercice 50. $\star$
Calculer $A = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}dx$

Exercice 51. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$

Exercice 52. *Pour* $\alpha \geq 0$, *donner un équivalent au voisinage de* $+\infty$ *de* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$

Exercice 53. *Calculer* $\int\limits_0^{\pi} \lfloor 2sin(t) \rfloor dt$

Exercice 54. *($\star$)*
Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_1^A \frac{E(\sqrt{t})}{t^2}dt \in \mathbb{R}$
Remarque : on peut montrer (pas immédiat et dur) que cette valeur vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 55. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = [(n+1)(n+2)\dots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$
Donner un équivalent de u_n.

Exercice 56. *($\star$)*
Soit f *une fonction continue d'un segment de longueur non nulle* $[a;b]$ *dans* $[0;+\infty[$.
Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\int\limits_a^b (f(t))^n dt)^{1/n} = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$