Feuille d'exercices n°3 : Chapitre 1

Exercice 27. *Soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\forall x \neq 0 \quad f(x) = x^2 sin(\frac{1}{x})$ *et* $f(0) = 0$.
a) Montrer que f *est continue et dérivable en 0.*
b) f *est-elle* C^1 *en 0 ?*
c) Donner l'allure de la représentation graphique de f.

Exercice 28. *Soit* f *une fonction continue de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = f(1)$.
Montrer que : $\exists x \in [0; \frac{1}{2}] \ / \ f(x) = f(x + \frac{1}{2})$

Exercice 29. *Un cycliste parcours 40km en deux heures. On suppose que sa vitesse et sa position sont des fonctions continues du temps.*
Montrer qu'il y a un intervalle d'une heure pendant lequel le cycliste a parcouru exactement 20km.

Exercice 30. *Soit* a *et* b *deux nombres réels tels que :* $a < b$.
Soit f *une fonction de* $[a;b]$ *dans* $[a;b]$.
On suppose de plus qu'il existe k *un réel vérifiant* $0 < k < 1$ *tel que :*

$$\forall x, y \in [a;b] \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$

a) Montrer que f *est continue sur* $[a;b]$.
b) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [a;b]$ *tel que :* $f(\theta) = \theta$.
Soit $u_0 \in [a;b]$ *et soit la suite* (u_n) *définie par* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
c) Montrer que (u_n) *converge vers* θ.
d) Montrer que la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 0.1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 1 - \frac{v_n^2}{3} \end{cases}$ *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 31. *En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |sin(x)| \leq |x|$$

Exercice 32. *($\star$) (Règle de l'Hospital)*
Soit f *et* g *deux fonctions dérivables sur* $[a, b]$ *telles que :* $g(a) \neq g(b)$ *et* $\forall x \in [a, b] \quad g'(x) \neq 0$
a) Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ *tel que :* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
b) En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \mu \in \mathbb{R}$ *alors* $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \mu$
c) Application : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x - sin(x)}$

Exercice 33. *($\star$) (Théorème de Darboux)*
Soit f *une fonction dérivable sur un segment* $[a;b]$.
Montrer que f' *vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.*
(f' *prend toutes les valeurs entre* $f'(a)$ *et* $f'(b)$*)*