Chapitre 2 : Intégrales généralisées sur un intervalle

Dans ce chapitre, on considère des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1 Intégrales généralisées

1.1 Première définition

1.1.1 Définition

Définition. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.*
Soit f une fonction continue par morceaux de $[a; b[$ dans $\mathbb{K}$.
*On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** si et seulement si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie dans $\mathbb{K}$.*
Si l'intégrale est convergente on pose : $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt$
Si l'intégrale n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Remarque. *Si la fonction f est prolongeable par continuité en $b \in \mathbb{R}$ alors on retrouve l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.*

1.1.2 Interprétation

Divers graphiques

1.2 Généralisation

1.2.1 Problème à gauche

Définition. *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $a < b$.*
*Soit f une fonction continue par morceaux de $]a; b]$ dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** si et seulement si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)dt$ existe et est finie dans $\mathbb{K}$.*
Si l'intégrale est convergente on pose : $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)dt$
Si l'intégrale n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

1.2.2 Problèmes aux deux bornes

Définition. *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.*
Soit f une fonction continue par morceaux de $]a; b[$ dans $\mathbb{K}$. Soit $c \in]a; b[$
*On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente***
si et seulement si $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes
Si l'intégrale est convergente on pose alors : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$
Si l'intégrale n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Remarque. *La convergence et la valeur de $\int_a^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c comme on le verra un peu plus loin.*

1.3 Exemples

1.3.1 Exemple 1

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

1.3.2 Exemple 2

Trouver un exemple de fonction f pour que $\int\limits_1^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente.

1.3.3 Exemple 3

Trouver un exemple de fonction f pour que $\int\limits_0^1 f(t)dt$ soit convergente.
Trouver un exemple de fonction g pour que $\int\limits_0^1 g(t)dt$ soit divergente.

1.3.4 Exemple 4

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

1.4 Caractère locale de la convergence

Définition. *On dit que deux intégrales convergentes ou divergentes sont de même nature.*

Lemme. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.*
Soit f une fonction continue par morceaux de $[a; b[$ dans $\mathbb{K}$. Soit $c \in]a; b[$.
Alors : $\int\limits_a^b f(t)dt$ et $\int\limits_c^b f(t)dt$ sont de même nature.

preuve :

Remarque. *On voit que la nature de l'intégrale est une propriété locale de f.*

1.5 Un exemple particulier

Construction de f continue, non bornée, positive, ne tendant pas vers 0 en $+\infty$ et telle que : $\int_0^{+\infty} f(t)dt)$ soit convergente.

2 Propriétés des intégrales généralisées

2.1 Linéarité

2.1.1 Théorème

Théorème . *Soit a et b dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ tels que : $a < b$.*
Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :
Si $\int\limits_a^b f(t)dt$ et $\int\limits_a^b g(t)dt$ sont convergentes alors $\int\limits_a^b (\lambda f(t) + g(t))dt$ est convergente.
Si $\int\limits_a^b f(t)dt$ est convergente et $\int\limits_a^b g(t)dt$ est divergente alors $\int\limits_a^b (f(t) + g(t))dt$ est divergente.

Remarques. *En particulier, si $\lambda \neq 0$ on a : $\int\limits_a^b f(t)dt$ et $\int\limits_a^b \lambda f(t)dt$ sont de même nature.*

Si $\int\limits_a^b f(t)dt$ et $\int\limits_a^b g(t)dt$ sont divergentes alors, on ne peut, sans informations supplémentaires, rien dire sur $\int\limits_a^b (f(t) + g(t))dt$

preuve :

2.1.2 Corollaire

Lemme. *L'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur $]a;b[$ telles que $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

2.2 Positivité, croissance

Théorème . *(Positivité)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $a = inf(I)$ et $b = sup(I)$.
Soit f une fonction continue par morceaux sur I.
Alors si f est positive et si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Théorème . *(Croissance)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $a = inf(I)$ et $b = sup(I)$.
Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur I.
Alors si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes et si $\forall t \in I$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

preuve :

2.3 Relation de Chasles

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $a = inf(I)$ et $b = sup(I)$.*
Soit f une fonction continue par morceaux sur I telle que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.
Alors $\forall(c, d, e) \in I^3$ $\int_c^e f(t)dt = \int_c^d f(t)dt + \int_d^e f(t)dt$

preuve :

2.4 Partie réelle et imaginaire

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $a = inf(I)$ et $b = sup(I)$.*
Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{C}$.
Alors si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente on a :
$\int_a^b Re(f(t))dt$ et $\int_a^b Im(f(t))dt$ qui sont convergentes et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f(t))dt + i\int_a^b Im(f(t))dt$

preuve :

3 Intégrales de références

3.1 Intégrale du ln en 0

Théorème . *$\int_0^1 ln(t)dt$ est convergente*

preuve :

3.2 Intégrales exponentielles

Théorème . *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors : $\int_0^\infty exp(-\alpha t)dt$ est convergente $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$*

preuve :

3.3 Intégrales de Riemann

3.3.1 Définition

Définition. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Soit* $a > 0$.
Alors les intégrales $\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha}$ *et* $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *sont appelées intégrales de Riemann*

3.3.2 Etude

3.3.3 Bilan

Théorème . *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Soit* $a > 0$. *Alors :* $\begin{cases} \int_0^a \frac{dt}{t^\alpha} \text{ est convergente } \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ est convergente } \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$

Remarques. *Les cas* $\alpha = 1$ *est le cas limite, l'intégrale ne converge jamais dans ce cas.*
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *est toujours divergente.*

Par contraposition : $\begin{cases} \int_0^a \frac{dt}{t^\alpha} \text{ est divergente } \Leftrightarrow \alpha \geq 1 \\ \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ est divergente } \Leftrightarrow \alpha \leq 1 \end{cases}$

4 Etude pour des fonctions positives

Dans cette partie les fonctions sont continues par morceaux et à valeurs dans $[0;+\infty[$.
Les théorèmes seront énoncés sur $[a;b[$ et sont facilement adaptable à $]a;b]$

4.1 Lemme préliminaire

Théorème . *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tels que :* $a < b$.
Soit f *une fonction continue par morceaux de* $[a;b[$ *dans* $[0;+\infty[$.

Alors : $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente si et seulement si* $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *est majorée.*

4.2 Comparaison

Théorème . *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tels que :* $a < b$.
Soit f *et* g *deux fonctions continues par morceaux de* $[a;b[$ *dans* $[0;+\infty[$.
On suppose que : $\forall x \in [a;b[\quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$. *Alors :* $\int_a^b g(t)dt$ *est convergente* $\Rightarrow$ $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente*

Remarques. *Par contraposition on a :* $\int_a^b f(t)dt$ *est divergente* $\Rightarrow$ $\int_a^b g(t)dt$ *est divergente*

Quand on utilise ce théorème, il est nécessaire de bien faire apparaître que l'on a fait $\boxed{\textit{attention au signe.}}$
Pour montrer la convergence, il faut majorer, pour la divergence il faut minorer.

preuve :

Exemple. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+t^2}$

5 Intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

5.1 Fonction intégrable

Définition. *Soit f une fonction continue par morceaux sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
Alors on dit que f est intégrable sur I si et seulement si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente avec $a = inf(I)$ et $b = sup(I)$.

Remarque. *On note parfois $\int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_I f$*

Exemple. $t \mapsto \frac{cos(\frac{1}{t})}{\sqrt(t)}$ *est intégrable sur* $]0;1]$

5.2 Absolue convergence

Théorème . *Soit f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
On pose $a = inf(I)$ et $b = sup(I)$.
Alors : f est intégrable sur $I \Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ est convergente

Remarque. *Attention la réciproque est fausse.*

preuve :

Exemple. $\int_0^1 \frac{cos(\frac{1}{t})}{\sqrt(t)}dt$

5.3 Contre-exemple très classique

On montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt$ est convergente alors que $t \mapsto \frac{sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0;+\infty[$

5.4 Quelques propriétés supplémentaires

5.4.1 Inégalité de la moyenne

Théorème . *Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
On pose $a = inf(I)$ et $b = sup(I)$.
Alors : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

preuve :

5.4.2 Théorème de l'intégrale généralisée nulle

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.*
Soit f une fonction de I dans K. Alors : $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ intégrable sur } I \\ \int_I |f| = 0 \end{cases} \Rightarrow f$ *est nulle sur I*

preuve :

5.4.3 Inégalité triangulaire

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.*
Soit f et g deux fonctions continue par morceaux de I dans K, intégrables sur I. Alors $f+g$ est intégrable sur I et et : $\left|\int_I (f+g)\right| \leq \int_I |f| + \int_I |g|$

preuve :

5.4.4 Structure vectorielle

Notation : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $L^1(I,K)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I, à valeurs dans K et intégrable sur I.

Théorème . *$L^1(I,K)$ est un K espace vectoriel.*

preuve :

5.5 Autres formulations pour les intégrales de références

Lemme. Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :
$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1;+\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$
et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0;1] \Leftrightarrow \alpha < 1$

preuve :

Lemme. Exponentielle

Soit $a > 0$, alors, $\forall b \in \mathbb{R}$: $t \mapsto exp(-at)$ est intégrable sur $[b;+\infty[$

preuve :

Lemme. ln

$\forall a > 0$: $t \mapsto ln(t)$ est intégrable sur $]0;a]$

preuve :

6 Théorèmes de comparaison

6.1 Equivalent

Théorème . *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.*
Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a;b[$ dans K.
Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b alors l'intégrabilité de f sur $[a;b[$ est équivalente à celle de g.

preuve :

Remarques. *Autrement dit : Si $|f(x)| \sim |g(x)|$ au voisinage de b alors $\int\limits_a^b |f|$ et $\int\limits_a^b |g|$ sont de même nature.*

Attention aux signes et aux valeurs absolues, on verra que l'on peut avoir $f \sim g$ et $\int_I f$ et $\int_I g$ qui ne sont pas de même nature.

Exemple. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^t dt}{1+sin(t)+e^t t^2}$

6.2 Négligeable, dominée

Théorème . *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.*
Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a;b[$ dans K.
Si $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de b alors l'intégrabilité de g sur $[a,b[$ implique celle de f.
Si $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de b alors l'intégrabilité de g sur $[a,b[$ implique celle de f.

preuve :

Remarques. *Autrement dit, sous les mêmes hypothèses : $\int_I |g|$ convergente $\Rightarrow \int_I |f|$ convergente et par contraposition $\int_I |f|$ divergente $\Rightarrow \int_I |g|$ divergente*

Exemple. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

7 Changement de variable, intégration par parties dans les intégrales généralisées

7.1 Changement de variable

7.1.1 Enoncés

Théorème . *Soit f une fonction continue sur $]a;b[$ et ϕ une bijection de classe C^1, strictement croissante de $]\alpha;\beta[$ vers $]a;b[$.*

Alors les intégrales $\int\limits_a^b f(t)dt$ et $\int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

preuve :

Remarques. *ϕ est une bijection et on a : $a = \lim\limits_{\substack{u\to\alpha \\ u>\alpha}} \phi(u)$ et $b = \lim\limits_{\substack{u\to\beta \\ u<\beta}} \phi(u)$*
On dit que l'on a effectuer le changement de variable C^1 bijectif $t = \phi(u)$.
Le théorème peut s'adapter avec ϕ strictement décroissante, en faisant attention aux bornes.

7.1.2 Exemple

Exemple. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dt}{t(ln(t))^3}$

7.1.3 Applications aux intégrales de Riemann

Lemme. *$x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ ssi $t \mapsto f(a+t)$ l'est l'est en 0^+*
$x \mapsto f(x)$ est intégrable en b^- ssi $t \mapsto f(b-t)$ l'est l'est en 0^+

Corollaire. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$*

Alors $\int\limits_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Remarque. *On peut appliquer se résultat à $\int\limits_b^a \frac{dt}{|t-a|^\alpha}$*

Exemple. *L'intégrale généralisée $\int\limits_{-1}^{6} \frac{dt}{(t+1)^3}$ est divergente car $3 > 1$,*

L'intégrale généralisée $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t+1}}$ est convergente car $\frac{1}{2} < 1$.

7.2 Intégration par parties

7.2.1 Etude

7.2.2 Théorème

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b[$.

Si $\lim\limits_{\substack{t\to b \\ c<b}} f(t)g(t)$ existe et est finie alors $\int\limits_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int\limits_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature et on a, en cas de convergence : $\int\limits_a^b f'(t)g(t)dt = \lim\limits_{\substack{t\to b \\ c<b}} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f(t)g'(t)dt$

preuve :

7.2.3 Exemples

Exemple. $\int\limits_1^{+\infty} xe^{-2x}dx = ...$

Sommaire