Feuille d'exercices n°8 : Chapitres 2 et 3

Exercice 76. *a) Etudier l'intégrabilité sur* $]0;+\infty[$ *de la fonction* $t \mapsto 1 - th(t)$
b) Etudier l'intégrabilité sur $]0;1[$ *de la fonction* $t \mapsto sin^3(\frac{1}{t^2})$
c) Etudier l'intégrabilité sur $]0;1[$ *de la fonction* $t \mapsto \frac{sin(ln(t))}{\sqrt{t(1-t)}}$

Exercice 77. *a) Etudier suivant le paramètre* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'intégrabilité sur* $[e;+\infty[$ *de la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t(ln(t))^\alpha}$
b) Etudier suivant le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'intégrabilité sur* $[e;+\infty[$ *de la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha ln(t)}$
c) (⋆) Etudier suivant les paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *l'intégrabilité sur* $[e;+\infty[$ *de la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (ln(t))^\beta}$

Exercice 78. *Convergence et calcul de* $\int\limits_0^{+\infty} exp(-\lfloor t \rfloor)dt$

Exercice 79. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *montrer la convergence de* $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{te^{-nt}}{sh(t)}dt$ *et étudier* $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

Exercice 80. *Pour* $a \in \mathbb{R}$ *on pose* $I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$
Montrer que $I(a)$ *est convergente.*
Calculer $I(a)$ *après avoir effectuer le changement de variable* $u = \frac{1}{t}$

. . . .

Exercice 81. *On note* E *l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur* $[0,1]$ *à valeurs réelles.*
On pose : $F = \{f \in E\ ,\ f(\frac{1}{2}) = 0\}$ $\quad G = \{f \in E\ ,\ f(0) + f(1) = 0\}$ $\quad H = \{f \in E\ ,\ f(0) + f(1) = 1\}$
$L = \{f \in E\ , \exists c \in [0,1]\ f(c) = 0\}$
$M = \{f \in E\ , f$ *est intégrable sur* $[0,1]\}$
Parmi les ensembles ci-dessus, lesquels sont des espaces vectoriel ?

Exercice 82. *Soit* $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+t=0 \\ x+z-2t=0 \end{cases} \}$
Montrer que F *est un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel.*

Exercice 83. *(⋆) Soit* E *un* K *espace vectoriel,* F *et* G *deux sous espace vectoriel de* E*.*
On suppose que $E = F \cup G$*. Montrer alors que* $F = E$ *ou* $G = E$*.*

Exercice 84. *On note* E *l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur* $[0,1]$ *à valeurs réelles.*
On pose $F = \{f \in E\ ,\ f^2$ *est intégrable sur* $[0,1]\}$
a) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$
b) Montrer que F *est un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel.*
Remarque : en général, on note $F = L^2([0,1],\mathbb{R})$