

Feuille d'exercices n°7 : Chapitre 2

Exercice 66. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{+\infty} \frac{\exp(x)+x^2}{4x+\sin(x)+x^2+1} dx & B &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\ln(1+t^2))}{1+7t+2t^2} dt & C &= \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2+1)}{1+t^2} dt & D &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \\
 E &= \int_0^{+\infty} \arctan(t) \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt & F &= \int_0^1 \frac{\sin(t^2)}{t^3} dt & G &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt & H &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^3} dt \\
 I &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt & J &= \int_0^3 \frac{1}{t^2-t-2} dt & K &= \int_0^3 \frac{\sin(t)}{t^2-t-2} dt & (\star) L &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1-\cos(t)}}{t} dt
 \end{aligned}$$

Exercice 67. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-\lambda t} dt$ est convergente.

Exercice 68. On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

a) Déterminer D le domaine de définition de Γ .

b) Montrer que : $\forall x \in D \quad \Gamma(x+1) = (x+1)\Gamma(x)$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\Gamma(n)$.

Exercice 69. Montrer la convergence et calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$

Exercice 70. Déterminer $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} \int_a^{2a} \frac{e^t - \cos(t)}{\sin^2(t)} dt$

Exercice 71. On définit les deux intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$
 Montrer que : I et J sont convergentes, égales et donner leur valeur en calculant d'abord $I + J$.

Exercice 72. (\star)

Soit f une fonction décroissante sur $[0; +\infty[$ et vérifiant : $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ convergente.

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$

Exercice 73. (\star)

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_3^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) dt$

Exercice 74. (\star)

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(x)}{x} dx$

Exercice 75. (\star)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0; 1[$ et à valeurs réelles.

On suppose que f'^2 est intégrable sur $[0; 1[$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$