Feuille d'exercices n°6 : Chapitre 2

Exercice 57. *Montrer la convergence de* $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^4}dt$ *et calculer* J.

Exercice 58. *a) Pour* $a > 0$, *calculer* $A(a) = \int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{ln(t)}{t}dt$ *et déterminer* $\lim\limits_{a\to+\infty} A(a)$

b) Déterminer la nature de $A = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ln(t))}{t}dt$

Exercice 59. *Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes et calculer celles qui sont convergentes.*

$A = \int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}dx \quad B = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2dx}{x(x+2)} \quad C = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^3}dt \quad D = \int\limits_0^{+\infty} texp(-t^2)dt \quad E = \int\limits_1^{\infty} \frac{ln(1+t^2)}{t^2}dt$

$F = \int\limits_2^{+\infty} \frac{2dx}{x(x-1)} \quad G = \int\limits_0^{1} \frac{ln(1+t^2)}{t^2}dt \quad H = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ln(1+t^2)}{t^2}dt \quad I = \int\limits_\pi^{+\infty} \frac{tcos(t)-2sin(t)}{t^3}dt \quad J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-x}{1+x+x^2+x^3}dx$

Exercice 60. *a) Montrer que :* $I_0 = \int\limits_0^1 ln(t)dt$ *est convergente et calculer* I_0

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad I_k = \int\limits_0^1 t^k ln(t)dt$ *est convergente et calculer* I_k

Exercice 61. *On pose* $\forall x \in]0; \frac{2}{\pi}[\quad f(x) = 2xsin(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})$
a) Sur la calculatrice, tracer la représentation graphique de f
b) Dériver $x \mapsto x^2 sin(\frac{1}{x})$ *sur* $]0; \frac{2}{\pi}[$

c) Montrer que $\int\limits_0^{\frac{2}{\pi}} f(x)dx$ *est convergente et calculer cette intégrale.*

Exercice 62. *Montrer que* $A = \int\limits_0^{+\infty} sin(2t)exp(-t)dt$ *est convergente et calculer* A

Exercice 63. *Montrer que :* $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{sin(t)}}{1+t^2}dt$ *est convergente et donner un encadrement de* I

Exercice 64. *(⋆)*

a) Montrer que : $\int\limits_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt$ *est convergente.*

b) En déduire l'existence de $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} [(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n)]$

Exercice 65. *(⋆(5/2))*

Montrer la convergence et calculer : $\int\limits_\pi^{+\infty} \frac{sin(t)}{\lfloor t\rfloor}dt$