# Question de cours, Exercices proches du cours

1°) Voir cours

2°) Au voisinage de $x = 0$ :
$f(x)$
$= \frac{\sqrt{1+x}}{1+e^x}$
$= \frac{(1+x)^{1/2}}{1+(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$
$= \frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2+o(x^2)}{2(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2))}$
$= (1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))\frac{1}{2}(1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})+\frac{x^2}{4}+o(x^2))$
$= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))(1-\frac{x}{2}+o(x^2))$
$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))$
$= \frac{1}{2}(1-\frac{3}{8}x^2+o(x^2))$

Donc : $\boxed{\text{au voisinage de } 0 : f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{16}x^2 + o(x^2)}$

3°) Le changement de variable (dérivable) $u = cos(x)$ dans $A$ donne :
$$A = \int_0^\pi \underbrace{sin^2(x)}_{1-cos^2(x)} cos^2(x) \underbrace{sin(x)dx}_{-du} = \int_1^{-1}(1-u^2)u^2(-du) = \int_{-1}^{1}(u^2-u^4)du$$
Par parité : $A = 2\int_0^1 (u^2-u^4)du = 2[\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}]_0^1 = 2[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}] = \frac{4}{15}$

On a donc : $\boxed{A = \frac{4}{15}}$

---

# Problème 1

1°) • Le domaine de $f$ (qui est $\mathbb{R}$) est symétrique par rapport à zéro et de plus $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(-x) = f(x)$
Donc : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$

• Comme $f$ est paire alors $\Gamma$ est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$

2°) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x\sqrt{1+x^2}-x^2\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2x(1+x^2)-x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(2+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
Comme $2+x^2 > 0$ et $1+x^2 \geq 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $x$.
On a alors :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3°) a) Au voisinage de $+\infty$ : $1+x^2 \sim x^2$ et donc $\sqrt{1+x^2} \sim x$ car $x>0$
On a donc : $\boxed{f(x) \sim \frac{x^2}{x} = x \text{ au voisinage de } +\infty}$

3°) b) Toujours au voisinage de $+\infty$ :
$f(x) = x^2(1+x^2)^{\frac{-1}{2}} = x(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{-1}{2}} = x(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})) = x - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$

Donc : $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty : f(x) = x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})}$

3°) c) $f(x) - x = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - x = \frac{x^2 - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(x-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$
Donc pour $x \geq 0$ : $f(x)-x$ est du signe de $x - \sqrt{1+x^2}$
Mais $x^2 \leq 1+x^2$ donc pour $x \geq 0$ : $x \leq \sqrt{1+x^2} \Rightarrow x - \sqrt{1+x^2} \leq 0$

Finalement : $\boxed{\forall x \geq 0 \quad , \quad f(x) - x \leq 0}$

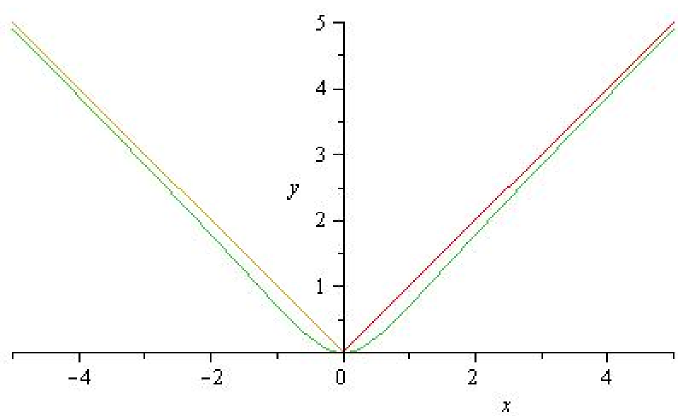
3°) d) On en déduit que $f(x)-x \sim \frac{-1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que la droite d'équation cartésienne $y=x$ est asymptote à $\Gamma$ au voisinage de $+\infty$ ($\Gamma$ se rapproche de cette droite), de plus avec le c) $\Gamma$ est en dessous de $y=x$.

4°) a) Pour $x$ au voisinage de 1 on pose $x = 1+h$ avec $h$ au voisinage de 0.
Alors : $f(x) = f(1+h) = \frac{(1+h)^2}{\sqrt{1+(1+h)^2}} = \frac{1+2h+o(h)}{\sqrt{2+2h+h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+2h+o(h))(1+h+o(h))^{\frac{-1}{2}}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+2h+o(h))(1-\frac{1}{2}h+o(h)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+2h-\frac{1}{2}h+o(h)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{3}{2}h+o(h)) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}h+o(h)$

$\boxed{\text{Pour } h \text{ au voisinage de } 0 : f(1+h) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}h+o(h)}$

4°) b) D'après le 4°)a) :
$\boxed{\text{une équation cartésienne de la tangente à } \Gamma \text{ au point d'abscisse } x=1 \text{ est } y = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1)}$

5°)



6°) Comme $u_0 > 0$ et que $\forall x \geq 0 \;\; f(x) \geq 0$, on a facilement que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n \geq 0$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ d'après le 3°)d) puisque $u_n \geq 0$.

Donc : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

7°) a) La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

7°) b) Notons $\alpha$ la limite de $(u_n)$.
En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on a par continuité :
$\alpha = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}}$
$\Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\sqrt{1+\alpha^2} = \alpha \Rightarrow \alpha = 0$ ou $1+\alpha^2 = \alpha^2 \Rightarrow \alpha = 0$ ou $1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

8°) Au voisinage de $+\infty$ : $f(x) - x \sim \frac{-1}{2x} < 0$ d'après le 3°) b)
Comme $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est une intégrale de Riemann divergente, alors par la règle de l'équivalent :

$\boxed{I = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \text{ est divergente.}}$

9°) La restriction de $f$ à $[0;+\infty[$ est une bijection de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$ puisque $f$ est continue sur $[0;+\infty[$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$
Donc $\forall y \geq 0 \;,\; \exists ! x \in [0;+\infty[ \;\;\; f(x) = y$
(existence par continuité et unicité par stricte croissance)

On a donc, en particulier : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; \exists ! x_n \in [0;+\infty[ \;\;,\;\; f(x_n) = n}$

Remarque : on peut aussi calculer $x_n$

10°) On a par le 3°)d) $f(x_n) - x_n \leq 0$ donc $f(x_n) \leq x_n$, mais $f(x_n) = n$ donc $n \leq x_n$ et donc, par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty}$

11°) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ et que $f(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$ alors $f(x_n) \sim x_n$ et comme $f(x_n) = n$ alors on a bien : $\boxed{x_n \underset{n=+\infty}{\sim} n}$

12°) a) $f(x_n) = n$
$\Leftrightarrow \frac{x_n^2}{\sqrt{1+x_n^2}} = n$
$\Leftrightarrow x_n^2 = n\sqrt{1+x_n^2}$
$\Leftrightarrow x_n^2 = x_n n \sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2}}$ comme $x_n > 0$
$\Leftrightarrow x_n = n\sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2}}$
$\Leftrightarrow x_n = n(1 + \frac{1}{x_n^2})^{\frac{1}{2}}$
Comme $x_n \sim n$ alors $\frac{1}{x_n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ et donc $\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$
Alors $x_n = n(1 + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}} = n(1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = n + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$

On a : $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty : x_n = n + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}$

12°) b) En reportant l'expression ci-dessus dans $x_n = n(1+\frac{1}{x_n^2})^{\frac{1}{2}}$ on obtient un terme de plus, on aurait aussi pu utiliser l'expression $x_n = \sqrt{\frac{n^2+\sqrt{n^4+4n^2}}{2}}$ qui s'obtient par calcul.

On obtient : $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty : x_n = n + \frac{1}{2n} - \frac{5}{8n^3} + o(\frac{1}{n^3})}$

# Problème 2

1) Pour $n \geq 1$, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)cos^{2n-1}(x)dx \\
&= \underbrace{[sin(x)cos^{2n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)(-(2n-1)sin(x)cos^{2n-2}(x))dx \\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2(x))cos^{2n-2}(x)dx \\
&= (2n-1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-2}(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n}(x)dx] \\
&= (2n-1)(C_{n-1}-C_n)
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ C_n = (2n-1)(C_{n-1}-C_n)}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin(x))^2(cos(x))^{2n-2}dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2(x))(cos(x))^{2n-2}dx$
$= C_{n-1} - C_n = \frac{C_n}{2n-1}$ en utilisant la relation du 1).

La relation du 1) se réécrit : $C_n = \frac{2n-1}{2n}C_{n-1}$ donc $\frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin(x))^2(cos(x))^{2n-2}dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}}$

3) On intègre $C_n$ par partie en primitivant $x \mapsto 1$ en $x \mapsto x$ :

$$C_n = \underbrace{[xcos^{2n}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-2nsin(x)cos^{2n-1}(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2nxsin(x)cos^{2n-1}(x)dx$$

On refait une intégration par partie en primitivant $x \mapsto 2nx$ en $x \mapsto nx^2$

$$\begin{aligned}
C_n &= \underbrace{[nx^2sin(x)cos^{2n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^2(cos(x)cos^{2n-1}(x) - (2n-1)sin^2(x)cos^{2n-2}(x))dx \\
&= -n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2cos^{2n}(x)dx + (2n-1)n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(1-cos^2(x))cos^{2n-2}(x))dx \\
&= -D_n + n(2n-1)(D_{n-1}-D_n) \\
&= n(2n-1)D_{n-1} - 2n^2D_n
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ C_n = n(2n-1)D_{n-1} - 2n^2D_n}$

4) En divisant l'égalité du 3) par $nC_n^2 \neq 0$ on obtient : $\frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n}\frac{D_{n-1}}{C_n} - 2\frac{D_n}{C_n}$
Mais on sait d'après le 2) que : $\frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$ donc $\frac{1}{n^2} = 2\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - 2\frac{D_n}{C_n}$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \frac{1}{n^2} = 2(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n})}$

5) a) $a : x \mapsto sin(x)$ est dérivable deux fois sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $a'(x) = cos(x) - \frac{2}{\pi}$, $a''(x) = -sin(x) \leq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
On a donc $a$ concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donc la représentation graphique de $A$ est au dessus de ses cordes et comme $x \mapsto \frac{2}{\pi}x$ est une corde alors : $\boxed{\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\ ,\ sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x}$

Remarque : on peut aussi faire une étude de fonction (en allant jusqu'à la dérivée seconde)

5) b) Avec le a) : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\ ,\ x^2 \leq \frac{\pi^2}{4}sin^2(x)$ donc $D_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 cos^{2n}(x)dx \leq \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)cos^{2n}(x)dx$
On utilise maintenant le 2) décalé d'un indice et on a : $D_n \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{C_{n+1-1}}{2(n+1)} = \frac{\pi^2}{4}\frac{C_n}{2n+2}$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ D_n \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{C_n}{2n+2}}$

6) a) D'après 4) on a : $\frac{1}{k^2} = 2(\frac{D_{k-1}}{C_{k-1}} - \frac{D_k}{C_k})$.

On somme de $k=1$ à $k=n$ et on a, par téléscopage : $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 2\frac{D_0}{C_0} - 2\frac{D_n}{C_n}}$

6) b) Avec le 5) b) on a $0 \leq \frac{D_n}{C_n} \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{C_n}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{D_n}{C_n} = 0$
Avec le 6)a), on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{2D_0}{C_0}$

Mais $C_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$ et $D_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3} = \frac{\pi^3}{24}$
Alors $\frac{2D_0}{C_0} = \frac{2\pi^3}{24}\frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

# Problème 3

1) a) $0 < x < y$ et $t > 0$, donc $0 < x+t < y+t$, et comme $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ alors : $0 < \frac{1}{y+t} < \frac{1}{x+t}$

Bilan : $\boxed{\text{Si } (x,y) \in I^2 \text{ tel que : } x < y \text{ alors : } \forall t \in [0,1]\ ,\ \frac{1}{y+t} \leq \frac{1}{x+t}}$

1) b) Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$ alors :
$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt - \int_0^1 \frac{e^t}{y+t}dt = \int_0^1 (\frac{e^t}{x+t} - \frac{e^t}{y+t})dt = \int_0^1 e^t(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{y+t})dt$ par linéarité de l'intégrale.

Avec le a) : $f(y) - f(x) = \int_0^1 \underbrace{e^t}_{\geq 0} \underbrace{(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{y+t})}_{\leq 0} dt$

Donc, par positivité de l'intégrale : $0 < x < y \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

On a donc : $\boxed{f \text{ est décroissante sur } I.}$

2) a) Soit $x \geq \frac{x_0}{2}$. Alors :
$|f(x) - f(x_0)| = \left|\int_0^1 \frac{e^t}{x+t} - \frac{e^t}{x_0+t}dt\right| = \left|\int_0^1 e^t \frac{x_0 - x}{(x+t)(x_0+t)}dt\right| \leq \int_0^1 e^t \left|\frac{x_0-x}{(x+t)(x_0+t)}\right| dt$

On a pour $t \in [0,1]$ : $\begin{cases} \bullet\ \leq e^t \leq e^1 = e \\ \bullet\ \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x_0} \text{ puisque } x \geq \frac{2}{x_0} \\ \bullet\ \frac{1}{x_0+t} \leq \frac{1}{x_0} \end{cases}$, donc, par croissance de l'intégrale :

$|f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^1 e\,|x - x_0|\, \frac{2}{x_0}\frac{1}{x_0}dt$

Finalement : $\boxed{\forall x \in [\frac{x_0}{2}, +\infty[\ ,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}}$

2) b) Quand $x \longrightarrow x_0 > 0$, alors à partir d'un certain rang $x \geq \frac{x_0}{2}$, donc on peut utiliser l'inégalité du a).
Comme $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2} = 0$ alors par comparaison $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

On a donc bien : $\boxed{f \text{ est continue en } x_0}$

2) c) On a vu au début de ce 2) que $f$ était continue en tout point $x_0$ de $I$, donc $\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$

3) a ) Soit $x > 0$. Pour $t \in [0,1]$ on a :
$0 \leq t \leq 1$
$\Rightarrow 0 < x \leq x + t \leq x + 1$
$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x}$
$\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^t}{x+1}dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x}dt \Rightarrow \boxed{\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}}$

3) b) Du a) on déduit : $\underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \leq \frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} \leq 1$

Donc par encadrement : $\frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc : $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty : f(x) \sim \frac{e-1}{x}}$

4) a) Soit $t \in ]0,1]$. Alors $u \mapsto e^u$ est continue sur $[0,t]$ et dérivable sur $]0,t[$, on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis et on obtient : $\exists c \in ]0,t[$ tel que : $e^t - e^0 = exp'(c)(t-0) \Leftrightarrow e^t - 1 = e^c t$
Comme $t \in ]0,1]$ alors $0 \leq e^c \leq e^1 = e$ et donc $|e^t - 1| \leq et$
On remarque que cette égalité est encore valable en $t = 0$ et on a donc :

$$\boxed{\forall t \in [0,1]\ ,\ |e^t - 1| \leq et}$$

Remarque : $M = e$ convient

4) b) Soit $x \in I$. Par l'inégalité de la moyenne : $|g(x)| \leq \int\limits_0^1 |e^t - 1| \left|\frac{1}{x+t}\right| dt$

En utilisant le a) et $\frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{t}$ on a : $|g(x)| \leq \int\limits_0^1 \frac{Mt}{t} dt = M$ et donc $\boxed{g \text{ est bornée sur } I}$

4) c) Au voisinage de $0^+$ :

$$f(x) = \int\limits_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt = \int\limits_0^1 \frac{e^t - 1 + 1}{x+t} dt = g(x) + \int\limits_0^1 \frac{1}{x+t} dt = \underbrace{g(x)}_{\text{bornée}} + \underbrace{ln(x+1)}_{\text{bornée}} - \underbrace{ln(x)}_{\longrightarrow -\infty}$$

Donc : $\boxed{f(x) \sim -ln(x) \text{ pour } x \text{ au voisinage de } 0^+}$

5) a) $h$ est dérivable sur $[0,1]$ et $h'(t) = \frac{e^t(1+t) - e^t}{(1+t)^2} = \frac{e^t}{(1+t)^2} > 0$ donc $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } [0,1]}$

5) b) $u_n$ et $v_n$ sont des approximations par des rectangles (à gauche ou à droite) de $\int\limits_0^1 h(t)dt$ (cf cours de sup sur les sommes de Riemann)
Comme $h$ est croissante, $u_n$ est une valeur approchée par défaut et $v_n$ une valeur approchée par excès.

5) c) $h$ est croissante sur $[0,1]$ donc $\forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]\ ,\ h(\frac{k}{n}) \leq h(t) \leq h(\frac{k+1}{n})$

En intégrant entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ on obtient : $\boxed{\frac{1}{n}h(\frac{k}{n}) \leq \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t)dt \leq \frac{1}{n}h(\frac{k+1}{n})}$

5) d) En sommant pour $k$ variant de $0$ à $n-1$ les inégalités du 5) c) :

$$u_n \leq \int\limits_0^1 h(t)dt \leq v_n$$

$\Rightarrow u_n \leq f(1) \leq v_n$ on retranche $\frac{u_n + v_n}{2}$
$\Rightarrow \frac{u_n - v_n}{2} \leq f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$
$\Rightarrow \left|f(1) - \frac{u_n + v_n}{2}\right| \leq \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{h(1) - h(0)}{2n}$

On a donc : $\boxed{\left|f(1) - \frac{u_n + v_n}{2}\right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}}$

5) e) $\frac{h(1) - h(0)}{2n} \leq \frac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{e}{2} - 1}{2n} \leq \frac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow \frac{e}{2} - 1 \leq n10^{-2} \Leftrightarrow 50e - 100 \leq n$

On on peut donc prendre $\boxed{n_0 = \lfloor 50e - 100 \rfloor + 1}$