Chapitre 2 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé exercice 2.1

Montrer que $A = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+4t+3} dt$ est une intégrale convergente et calculer A.

Correction

$t \mapsto \frac{2}{t^2+4t+3}$ est une fonction continue sur $[0; +\infty[$, donc A est une intégrale impropre en $+\infty$

On va chercher une écriture plus simple de la fonction à intégrer.
On écrit $\frac{2}{t^2+4t+3} = \frac{2}{(t+3)(t+1)} = \frac{a}{t+3} + \frac{b}{t+1}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{2}{(t+3)(t+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+3}$
$\Leftrightarrow \frac{2}{(t+3)(t+1)} = \frac{a(t+1)+b(t+3)}{(t+1)(t+3)}$
$\Leftrightarrow 2 = a(t+1) + b(t+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a + 3b \\ 0 = a + b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

On a donc $\frac{2}{t^2+4t+3} = \frac{-1}{t+3} + \frac{1}{t+1}$

Soit $X > 0$.
$\int\limits_0^X \frac{2}{t^2+4t+3} dt = \int\limits_0^X \frac{-1}{t+3} + \frac{1}{t+1} dt = [-ln(t+3) + ln(1+t)]_0^X = ln(\frac{1+X}{3+X}) + ln(3) \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} ln(3)$

On en déduit que : $\boxed{A \text{ est convergente et que } A = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+4t+3} dt = ln(3)}$

Enoncé exercice 2.2

Déterminer la nature de $B = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2 exp(t)} dt$

Correction

$t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2 exp(t)}$ est continue sur $[0;+\infty[$, B pose donc problème en $+\infty$

On a : $\frac{t^2}{1+t^2 exp(t)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t} > 0$

Or, on sait d'après le cours que $t \mapsto e^{-t}dt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc, par la règle de l'équivalent on a que $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2 exp(t)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et donc, par absolue convergence :

$\boxed{B = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2 exp(t)} dt \text{ est convergente}}$

Enoncé exercice 2.3

Déterminer la nature de $C = \int\limits_1^{+\infty} \frac{sint(t+3t^2)}{t^2} dt$

Correction

$t \mapsto \frac{sint(t+3t^2)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$, C est donc impropre en $+\infty$

On a : $\left|\frac{sint(t+3t^2)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et donc $\left|\frac{sint(t+3t^2)}{t^2}\right| = O(\frac{1}{t^2})$

Or, on sait d'après le cours (Riemann) que $t \mapsto \frac{1}{t^2}dt$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc, par comparaison on a que $t \mapsto \frac{sint(t+3t^2)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On en déduit donc, par absolue convergence que : $\boxed{C = \int\limits_1^{+\infty} \frac{sint(t+3t^2)}{t^2} dt \text{ est convergente}}$

Enoncé exercice 2.4

Déterminer la nature de $D = \int\limits_0^{+\infty} cos(t^2) dt$

Correction

$t \mapsto cos(t^2)$ est continue sur $[0; +\infty[$, D est donc impropre en $+\infty$

$t \mapsto t^2$ est une bijection de classe C^1 de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.
Effectuons dans $\tilde{D} = \int_1^{+\infty} cos(t^2)dt$ le changement de variable C^1 bijectif $u = t^2$, alors $t = \sqrt{u} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$
On en déduit $\tilde{D}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{cos(u)}{2\sqrt{u}}du$
Soit $X > 1$.
On effectue une intégration par partie avec les fonctions C^1 sur $[1; +\infty[$: $\begin{cases} f' = cos(u) \\ g = \frac{1}{2\sqrt{u}} \end{cases}$ et $\begin{cases} f = sin(u) \\ g' = \frac{-1}{4u^{3/2}} \end{cases}$.
On obtient : $\tilde{D} = \int_1^{+\infty} \frac{cos(u)}{2\sqrt{u}}du = [\frac{sin(u)}{2\sqrt{u}}]_1^X + \frac{1}{4}\int_1^X \frac{cos(u)}{u^{3/2}}du = \frac{sin(X)}{2\sqrt{X}} - \frac{sin(1)}{2} + \frac{1}{4}\int_1^X \frac{cos(u)}{u^{3/2}}du$

Comme sin est bornée, on a : $\frac{sin(X)}{2\sqrt{X}} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\tilde{D}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{cos(u)}{u^{3/2}}du$

Mais $\forall u \geq 1$, $\left|\frac{cos(u)}{u^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{u^{3/2}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable (Riemann) sur $[1, +\infty[$, donc comparaison on a : $t \mapsto \frac{cos(u)}{u^{3/2}}$ intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, par absolue convergence $\int_1^{+\infty} \frac{cos(u)}{u^{3/2}}du$ est convergente.

On en déduit $\tilde{D}$ convergente et donc $\boxed{D = \int_0^{+\infty} cos(t^2)dt \text{ convergente.}}$

Enoncé exercice 2.5

Montrer que $G = \int_0^{+\infty} exp(-t^2)dt$ est convergente.

Correction

$t \mapsto exp(-t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$. G ne pose donc problème qu'en $+\infty$
On a au voisinage de $+\infty$, par comparaison exponentielle-puissance : $exp(-t^2) = o(\frac{1}{t^2})$
puisque $\lim_{t \to +\infty} \frac{exp(-t^2)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to +\infty} t^2 exp(-t^2) = 0$
Mais $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par Riemann, donc par négligeabilité $t \mapsto exp(-t^2)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$
Comme il n'y a pas de problème sur $[0, 1]$, $t \mapsto exp(-t^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et par absolue convergence $\boxed{G = \int_0^{+\infty} exp(-t^2)dt \text{ est convergente.}}$

Enoncé exercice 2.6

Montrer que $D = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$ est convergente.

Correction

On pose : $\begin{array}{cccc} \varphi & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{\sin(t)}{t} \end{array}$ ainsi on doit étudier $D = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)dt$

φ est continue sur $]0,+\infty[$, D pose donc problème aux bornes 0 et $+\infty$.

- **En 0**

Au voisinage de $t = 0^+$: $\varphi(t) = \frac{sin(t)}{t} \sim \frac{t}{t} = 1$ donc φ est prolongeable par continuité en $t = 0$.
$D_1 = \int\limits_0^1 \varphi(t)dt$ est donc convergente, comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

- **En $+\infty$**

Soit $A > 1$. Alors, par intégration par partie :
$$\int\limits_1^A \frac{sin(t)}{t} dt = \int\limits_1^A \underbrace{sin(t)}_{u'} \underbrace{\frac{1}{t}}_{v} dt = [\underbrace{-cos(t)}_{u} \underbrace{\frac{1}{t}}_{v}]_1^A - \int\limits_1^A \underbrace{-cos(t)}_{u} \underbrace{\frac{-1}{t^2}}_{v'} dt = \frac{-cos(A)}{A} + cos(1) - \int\limits_1^A \frac{cos(t)}{t^2} dt$$

Pour $t \geq A$, on a : $\left|\frac{cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. De plus, par Remann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, par comparaison,$t \mapsto \frac{cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc $\int\limits_1^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2} dt$ est convergente.

Avec l'égalité obtenue par intégration par partie on obtient, puisque $\frac{-cos(A)}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (cos bornée) :
$\int\limits_1^A \varphi(t)dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} cos(1) - \int\limits_1^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2} dt \in \mathbb{R}$
$D_2 = \int\limits_1^{+\infty} \varphi(t)dt$ est donc convergente.

- Comme $D = D_1 + D_2$ et que D_1 et D_2 sont convergentes alors : $\boxed{D = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt \text{ est convergente.}}$