Chapitre 3 : Espaces vectoriels, applications linéaires

Remarque préliminaire : dans ce chapitre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et F sont deux K espaces vectoriels.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions

1.1.1 Loi interne et externe

Définitions. *Soit E un ensemble.*
*On appelle **loi interne** de E toute application de $E \times E$ dans E.*
*On appelle **loi externe** de K sur E toute application de $K \times E$ dans E.*

Exemples. *L'addition dans $\mathbb{R}$ est une loi interne, la multiplication d'une matrice par un scalaire est une loi externe.*

1.1.2 Définition Générale

Définition. *On appelle K espace vectoriel tout ensemble E muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe de K sur E notée . vérifiant :*

- *$(E,+)$ est un groupe commutatif*
  - $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \in E$
  - $\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in E^3$, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
  - $\exists\overrightarrow{0_E} \in E \mid \forall\vec{u} \in E$, $\overrightarrow{0_E}+\vec{u}=\vec{u}+\overrightarrow{0_E}=\vec{u}$
  - $\forall\vec{u} \in E\ \exists\vec{v} \in E$, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{0_E}$
- $\forall\vec{u} \in E$, $1_K.\vec{u}=\vec{u}$
- $\forall\vec{u} \in E\ \forall(\lambda,\mu) \in K^2$, $(\lambda+\mu).\vec{u}=\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u}$
- $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2\ \ \forall\lambda \in K$, $\lambda.(\vec{u}+\vec{v})=\lambda.\vec{u}+\lambda.\vec{v}$
- $\forall\vec{u} \in E\ \forall(\lambda,\mu) \in K^2$, $\lambda.(\mu.\vec{u})=(\lambda\mu).\vec{u}$

Remarques. *On revient rarement à cette définition sauf pour les exemples de bases vus en première année. Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, ceux de K **scalaires**.*

1.2 Sous espace vectoriel

On pourra utiliser la caractérisation suivante :

Lemme. *Soit E un K espace vectoriel et F une partie non vide de E. Alors :*
F est un sous-espace vectoriel de E
si et seulement si $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in F^2$, $\forall\lambda \in K$, $\vec{u}+\lambda\vec{v} \in F$

Lemme. *Un sous espace vectoriel est un espace vectoriel.*

Remarque. *Pour montrer qu'un ensemble E est un K espace vectoriel, on montre que E est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel plus grand connu comme par exemple : K^n, $M_n(K)$, $K[X]$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ etc...*

1.3 Intersection

Lemme. *Soit F et G deux sous espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E.*

preuve :

1.4 Exemple

$F=\{P \in \mathbb{C}[X]\ ,P'(1)=0\}$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

2 Applications linéaires

2.1 Définition

Définition. *Soit f une application de E dans F. Alors on dit que :*

$$f \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } F$$
$$\text{si et seulement si } \forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2 \ \forall\lambda \in K \ , \ \ f(\vec{u}+\lambda\vec{v}) = f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{v})$$

Remarques. *On a alors* $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.
On note $L(E,F)$ *l'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F.
On note $L(E)$ *l'ensemble des applications linéaires de* E *dans* E.

2.2 Vocabulaire

Définitions. *Avec les notations du paragraphe précédent.*

- *Si* $E = F$ *on parle d'endomorphisme.*
- *Si* f *est bijective on parle d'isomorphisme.*
- *Si* f *est bijective et que* $F = E$ *on parle d'automorphisme.*

2.3 Somme et composée d'applications linéaires

Lemme. *Soit* f *et* g *deux applications linéaires de* E *dans* F *et* $\lambda \in K$.
Alors $f + \lambda g$ *est une application linéaire de* E *dans* F.

Corollaire. $L(E,F)$ *est un* K *espace vectoriel.*

Lemme. *Soit* E, F *et* G *trois* K *espaces vectoriels. Soit* $f \in L(E,F)$ *et* $g \in L(F,G)$ *Alors* $g \circ f \in L(E,G)$.

2.4 Noyau

2.4.1 Définition

Définition. *Soit* $f \in L(E,F)$ *alors on pose* $ker(f) = \{x \in E \ , \ f(x) = \overrightarrow{0_F}\}$.
$ker(f)$ *est appelé noyau de* f.

2.4.2 Lemme

Lemme. *Soit* $f \in L(E,F)$. *Alors :* $ker(f)$ *est un sous espace vectoriel de* E.

preuve :

2.4.3 Lien avec l'injectivité

Lemme. *Soit* $f \in L(E,F)$. *Alors :* f *injective* $\Leftrightarrow ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$

preuve :

2.5 Image

2.5.1 Définition

Définition. *Soit* $f \in L(E,F)$ *alors on pose* $Im(f) = f(E) = \{y \in F \ , \ \exists x \in E \ , \ f(x) = y\}$.
$Im(f)$ *est appelé image de* f.

2.5.2 Lemme

Lemme. *Soit* $f \in L(E,F)$. *Alors :* $Im(f)$ *est un sous espace vectoriel de* F.

preuve :

2.5.3 Lien avec la surjectivité

Lemme. *Soit* $f \in L(E,F)$. *Alors :* f *surjective* $\Leftrightarrow Im(f) = F$

preuve :

3 Famille finie de vecteurs

3.1 Combinaison linéaire

Définitions. *Soit $n \geq 1$ et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ une famille finie de n vecteurs de E.*
Alors on appelle **combinaison linéaire** *de la famille $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ tout vecteur de E s'écrivant :*
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ *avec* $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$.
On note $Vect(x_1, ..., x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, ..., x_n)$.
On dit que c'est l'espace vectoriel engendrée par $(x_1, ..., x_n)$.

Lemme. *$Vect(x_1, ..., x_n)$ est un sous espace vectoriel de E*

preuve :

Remarques. *Certains coefficients peuvent être nuls.*
Par exemple un polynôme de $K_n[X]$ est une combinaison linéaire de la famille finie $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$.
Un vecteur peut s'écrire sous forme de différentes combinaisons linéaires.
Par exemple : $X^2 = (X^2 + X + 1) - (1 + X) = (X^2 - 2X - 1) + (2X) + (1)$

3.2 Familles génératrices

Définition. *Soit $A = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors on dit que :*
A est **génératrice** *de E, si et seulement si, $E = Vect(A)$.*

Exemple. *$(1 + X, 1 - X)$ est génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$*

3.3 Famille libre, famille liée

Définitions. *Si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille finie de E, alors on dit que :*
$(x_1, ..., x_n)$ est ***libre***
si et seulement si $\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$
Si $(x_1, ..., x_n)$ n'est pas libre, on dit que $(x_1, ..., x_n)$ est ***liée***

Remarque. *Par contraposée de la définition de libre.*
Si $\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$ ***non tous nuls*** *tel que :* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$ *alors $(x_1, ..., x_n)$ est liée.*

Exemple. *$(1 + X, 1 - X)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_1[X]$*

3.4 Bases

Définition. *Une* **base** *de E est une famille libre et génératrice de E.*

Exemple. *$(1 + X, 1 - X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$*

4 Dimension finie

4.1 Définition

Définition. *Soit E un K espace vectoriel. Alors on dit que E est de dimension finie*
si et seulement si E admet une base de cardinal fini.

Lemme. *Si E est de dimension finie alors toute ses bases ont le même cardinal.*
Ce cardinal est appelé **dimension de E**.

preuve : voir cours de première année.

Exemple. *$\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 car $(1, X, X^2)$ en est une base.*

4.2 Sous espace vectoriel

Lemme. *Tout sous espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$.*

4.3 Théorème de la base incomplète

Théorème . *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille libre de vecteurs non nuls de E.*
Alors, il existe $(e_{p+1}, ..., e_n)$ dans E^{n-p} tel que : $(e_1, e_2, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ soit une base de E.

4.4 Propriété

Lemme. *Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un K espace vectoriel E de dimension finie. Alors :*

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

4.5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition. *Soit A une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie.*
Alors on appelle rang de A et on note $rg(A)$ la valeur $rg(A) = dim(Vect(A))$.

Remarque. *On a de manière évidente : $rg(A) \leq dim(E)$.*

4.6 Théorème du rang

4.6.1 Rappel

Définition. *Si E est de dimension finie et si $f \in L(E, F)$ alors on pose $rg(f) = dim(Im(f))$.*
*$rg(f)$ est appelé **rang** de f.*

Remarque. *Même si F n'est pas de dimension finie, $Im(f)$ l'est, on a même $rg(f) \leq dim(E)$.*

4.6.2 Théorème du rang

Théorème . *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et F un K espace vectoriel. Soit $f \in L(E, F)$. Alors :*

$$dim(E) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$$

preuve :

4.6.3 Cas particuliers

Théorème . *Si E et F sont de même dimension finie et si $f \in L(E, F)$. Alors :*

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Remarque. *Si $E = F$ est de dimension finie on a bien sûr ce résultat.*

preuve : c'est un corollaire du théorème du rang

4.7 Hyperplan

Dans cette section E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. On pose $dim(E) = n$.

4.7.1 Formes linéaires

Définition. *On dit qu'une application linéaire de E dans K est une forme linéaire sur E.*

Exemple. *Les formes coordonnées.*
Soit E un K espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, e_2, .., e_n)$.

on pose $$e_i^* : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & K \\ x & \mapsto & x_i \text{ ou } x \in E \text{ s'écrit } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$$

Les e_i^* sont des formes linéaires.

4.7.2 Hyperplans

Définition. *Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, alors on dit que : $ker(\varphi)$ est un hyperplan de E.*

4.7.3 Propriétés

Lemme. *Si F est un sous espace vectoriel de E, alors :*
F est un hyperplan de $E \Leftrightarrow dim(F) = dim(E) - 1$

Remarque. *En dimension 2, un hyperplan est une droite, en dimension 3, un hyperplan est un plan.*

preuve :

Théorème . *Soit H un hyperplan de E alors il existe D une droite vectorielle de E telle que : $E = H \oplus D$.*

Remarque. *Un hyperplan est un sous espace vectoriel admettant une droite vectorielle comme supplémentaire.*

4.7.4 Equation d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E et soit ϕ une forme linéaire sur E telle que $H = ker(\phi)$.
Soit $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ une base de E.
Pour tout $x \in E$ on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans B.

On a alors $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)$.
On a alors :
x de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans B appartient à $H = ker(\phi) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i) x_i = 0$.

Cette dernière équation est appelée équation de H dans la base B.

Remarques. *Tout hyperplan admet une équation dans B.*
Ce résultat est déjà connue pour les équations de droites vectorielles dans le plan et pour les équation de plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ vectoriel.

Exemple. *Equation dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$.*

Sommaire