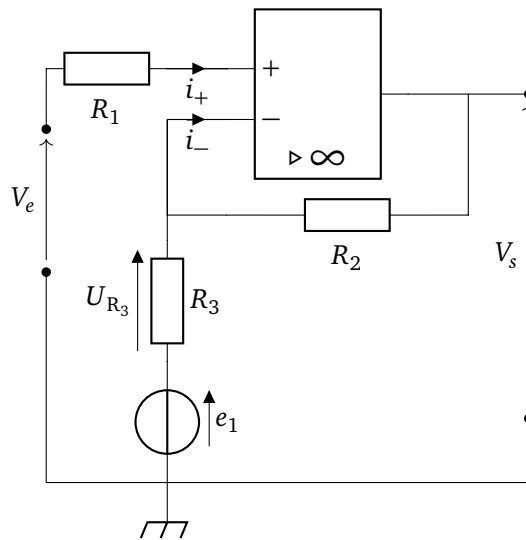


Utilisation des matériaux piézo-électriques

I. Utilisation en capteur de forces

I.A. Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

Q1. Modèle de l'ALI idéal : gain différentiel infini, bande passante infinie, impédance d'entrée infinie, impédance de sortie nulle.



Conséquence : $i_+ = i_- = 0$, et en régime linéaire : $V_+ = V_-$.

Ainsi, $V_e - R_1 i_+ = V_e = V_+ = V_- = e_1 + U_{R_3}$

Diviseur de tension avec R_3 et R_2 en série (car $i_- = 0$) : $U_{R_3} = (V_s - e_1) \frac{R_3}{R_2 + R_3}$

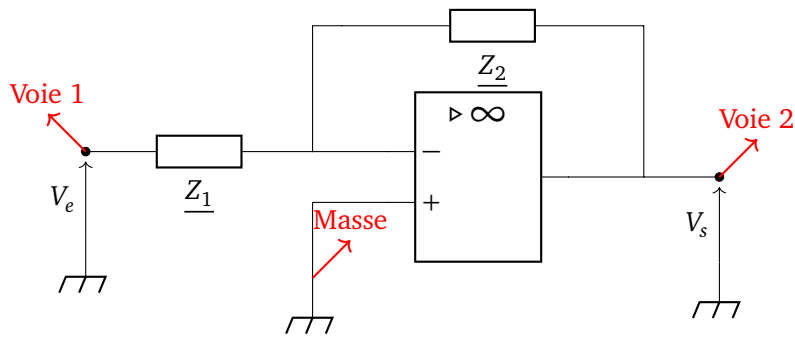
On conclut : $V_e = e_1 + (V_s - e_1) \frac{R_3}{R_2 + R_3} \implies V_e = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}$

Q2. $V_e = 0,95 \text{ V}$

Q3. $F = \frac{C V_e}{K} = 0,76 \text{ N}$

I.B. Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame.

Q4. On travaille en régime sinusoïdal forcé, on passe donc par un modèle d'impédance, en notant ω la pulsation de forçage.



Sur le schéma, $\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}$, et $\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega$

L'ALI est idéal, donc $V_- = V_+ = 0$, il n'y a pas de courant d'entrée à la borne $-$:

Loi des noeuds :

$$\frac{V_e - 0}{\underline{Z}_1} = \frac{0 - V_s}{\underline{Z}_2} \Rightarrow \underline{H} = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{1}{\underline{Z}_1/\underline{Z}_2} = -\frac{1}{\left(R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}\right)\left(\frac{1}{R_2} + jC_2\omega\right)}$$

En développant :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + j(R_1C_2\omega - \frac{1}{R_2C_1\omega}) + \frac{C_2}{C_1}} = -\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}} \frac{1}{1 + j\left(\frac{R_1C_2}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}\omega - \frac{1}{R_2C_1\omega\left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right)}\right)}$$

Par identification : $A = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}$, $\omega_1 = \frac{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}{R_1C_2} = \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2}$; $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_1\left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right)} = \frac{1}{R_1C_1 + R_2C_2}$

Q5. $H = |\underline{H}| = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)^2}}$

$\lim_{\omega \rightarrow 0} H = 0$ et $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H = 0$: c'est un filtre passe-bande du second ordre.

Q6. Le gain H est maximal quand le dénominateur de la fraction est minimal, donc quand le terme sous la racine est minimal : c'est donc quand le carré est nul.

Ainsi H maximal équivaut à $\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \omega_1\omega_2$

Comme $\omega > 0$, $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$

Q7. Il faut observer les deux tensions à l'oscilloscope et repérer si le déphasage d'une tension par rapport à l'autre vaut π , c'est-à-dire **quand le maximum d'un des signaux coïncide avec le minimum de l'autre**. Une utilisation du mode XY peut être utile.

Un oscilloscope à double voie peut être utilisé, en connectant les masses à la masse du montage, et la voie 1 et 2 comme sur le schéma de la question Q4.

Q8. R_1 ayant été convenablement réglé, à la pulsation $\omega = 2\pi f$ d'excitation, le déphasage est de π entre signal de sortie et d'entrée.

$$\arg \underline{H} = \pi \Leftrightarrow \underline{H} \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \frac{A}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_{\max} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

Ainsi : $f = \frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} = \underline{0,32 \text{ kHz}}$

II. Utilisation d'un matériau piézoélectrique dans un airbag

II.A. Principe d'un accéléromètre.

Q9. Système : masse

Référentiel : lié à la voiture, non galiléen

Vecteur position : $x\vec{u}_x$, Vecteur vitesse : $\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x$, Vecteur accélération : $\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x$

Bilan des forces :

- Poids \vec{P} orthogonal à \vec{u}_x
- Réaction \vec{R} du support orthogonale à \vec{u}_x (pas de frottements solides)
- Rappel du ressort : $\vec{T} = -k(x - L_0)\vec{u}_x$
- Amortisseur : $\vec{f} = -\alpha \frac{dx}{dt}\vec{u}_x$

Forces d'inertie :

- Force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_e = m\vec{a}\vec{u}_x$

Q10. Principe fondamental de la dynamique dans le référentiel de la voiture :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x = \vec{P} + \vec{R} - k(x - L_0)\vec{u}_x - \alpha \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + m\vec{a}\vec{u}_x$$

Projection sur \vec{u}_x : $m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + k(x - L_0) = ma$

Avec $X = x - L_0$, $\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$, donc :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dX}{dt} + \frac{k}{m} X = a$$

Ce qui permet d'identifier : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

Q11. Pour $t < 0$, $x = L_0$, donc $X(t) = 0$

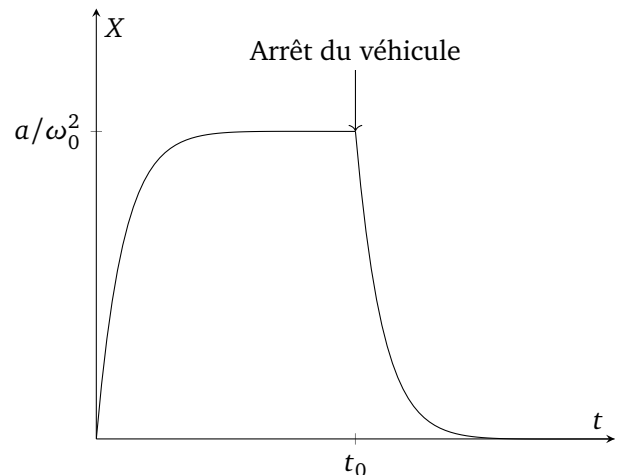
Q12. Supposons un modèle où la voiture subit une accélération constante dans le référentiel terrestre.

La solution pour $X(t)$ est composée d'une solution générale correspondant à un régime transitoire critique tendant vers 0, à laquelle s'ajoute la solution particulière.

Dans le modèle supposé, cette solution particulière revient à $X_p(t) = cst = \frac{a}{\omega_0^2}$: c'est donc $X(t_0)$, car on a atteint le régime permanent à t_0 .

$$X(t_0) = \frac{a}{\omega_0^2}$$

Une fois le freinage terminé, l'accélération a va s'annuler, donc la nouvelle solution particulière de l'équation obtenue sera $X = 0$. On peut donc supposer que pour $t \rightarrow \infty$, X tendra vers 0.



II.B. Utilisation du matériau piézoélectrique.

Q13. Système : voiture. Référentiel : terrestre.

On suppose que $\frac{dv}{dt} = -a = cst$. Si la voiture freine à partir de $t = 0$, on a : $v(t) = V - at$.

Or, $v(\Delta t) = 0$, donc $-a = -\frac{V}{\Delta t} = \underline{-10 \text{ m.s}^{-2}}$

Q14. Même expression : $-a = -\frac{V}{\Delta t} = \underline{-1,7 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-2}}$

Q15. Freinage brusque : $f_e = 10 \times 2,81 \cdot 10^{-3} = \underline{28 \text{ mN}}$; Cas d'un choc : $f_e = 1,7 \cdot 10^2 \times 2,81 \cdot 10^{-3} = \underline{0,47 \text{ N}}$

Q16. En supposant que seule la force d'inertie d'entraînement entre en compte : $\Delta V = f_e \chi$.

Pour un freinage brusque : $\Delta V = \underline{0,17 \text{ V}}$, Pour un choc : $\Delta V = \underline{2,82 \text{ V}}$

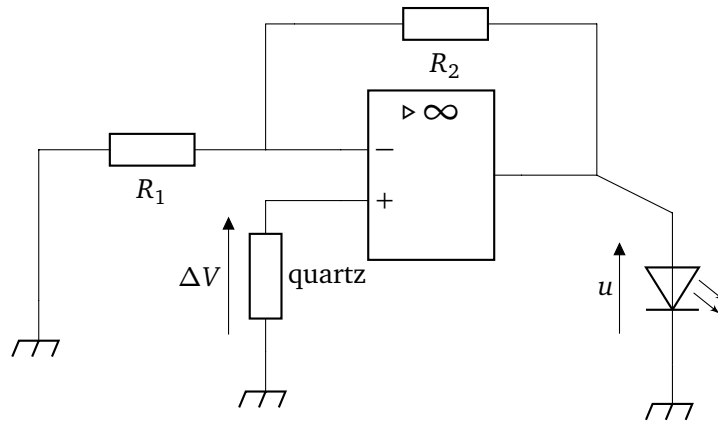
Cette différence de tension est décelable avec un millivoltmètre, mais elle peut être noyée dans du bruit électronique.

Q17. Le choix du coefficient 1/2 **permet d'avoir un régime transitoire le plus court possible**. Si le régime permanent n'était pas atteint avant l'arrêt du véhicule, alors la mesure de l'accélération ne correspondrait pas à celle du véhicule : elle serait sous-estimée.

II.C. Détecteur de tension.

Q18. Le montage doit permettre d'amplifier si besoin la différence de potentiel aux bornes du quartz, si possible linéairement, de manière à ce que le seuil U_d d'allumage de la diode se situe entre la valeur amplifiée pour un choc et celle amplifiée pour un freinage brusque.

On peut utiliser un montage amplificateur non inverseur :



Avec ce montage, et l'ALI idéal, on obtient avec un diviseur de tension : $\Delta V = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$, soit $u = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \Delta V$.

On souhaite que $\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \Delta V_{\text{choc}} > U_d > \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \Delta V_{\text{freinage}}$, soit :

$$\frac{\Delta V_{\text{freinage}}}{U_d} < \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} < \frac{\Delta V_{\text{choc}}}{U_d} \Leftrightarrow \frac{U_d}{\Delta V_{\text{choc}}} - 1 < \frac{R_2}{R_1} < \frac{U_d}{\Delta V_{\text{freinage}}} - 1$$

Application numérique : $\frac{R_2}{R_1} \in [0,65 ; 67]$.

On peut prendre un rapport de 1, et prendre par exemple : $\underline{R_1 = R_2 = 1,0 \text{ k}\Omega}$.

Un montage suiveur aurait aussi été adapté.

III. Microgénérateur piézoélectrique

III.A.

Q19. Le terme $M \frac{d^2z}{dt^2}$ représente l'accélération du centre d'inertie de la poutre.

Q20. $-kz$ représente une force de rappel : elle est liée au caractère flexible de la poutre, qui possède un module d'élasticité.

$-\alpha \frac{dz}{dt}$ représente une force de frottement fluide modélisant l'action de l'air sur la poutre lors de ses vibrations.

III.B.

Q21. On transforme l'équation dans le domaine complexe :

$$-M\omega^2 \underline{Z}_m e^{i\omega t} + i\alpha\omega \underline{Z}_m e^{i\omega t} + k\underline{Z}_m e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

Ainsi,
$$\underline{Z}_m = \frac{F_0}{k + i\alpha\omega - M\omega^2}$$

Q22. On obtient à cette pulsation : $\underline{Z}_m(\omega = \omega_0) = \frac{F_0}{i\alpha\omega_0}$

On trouve que $\arg\left(\frac{\underline{Z}_m(\omega = \omega_0)}{F_0}\right) = -\frac{\pi}{2}$ Cela signifie que le signal $z(t)$ oscille à la même pulsation que la force \vec{F}_E , mais en quadrature de phase retard.

Lorsque la force exercée est maximale vers le haut, le centre d'inertie de la poutre est à sa valeur moyenne, ce n'est qu'un quart de période plus tard qu'il atteindra sa position la plus haute.

Q23. Mathématiquement, pour un forçage à $\omega = \omega_0$: $z(t) = \text{Re}\left(-i \frac{F_0}{\alpha\omega_0} e^{i\omega_0 t}\right) = \frac{F_0}{\alpha\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

Ainsi,
$$v_z(t) = \frac{F_0}{\alpha} \cos(\omega_0 t)$$

III.C.

Q24. Par la loi des nœuds : $\beta v_z = C_0 \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R}$

La capacité C_0 correspond à la capacité du quartz à accumuler des charges sur ses armatures.

Q25. Le produit d'une force par une vitesse est une puissance. Ainsi βv_z représente une puissance par unité de tension, donc une intensité électrique.

Q26. L'équation réelle est :

$$C_0 \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = \beta F_0 \alpha \cos(\omega_0 t)$$

En complexe à la pulsation ω_0 : $i\omega_0 C_0 \underline{V}_m + \frac{\underline{V}_m}{R} = \beta \frac{F_0}{\alpha}$ Ainsi,
$$\underline{V}_m = \frac{R\beta F_0}{\alpha(1 + i\omega_0 R C_0)}$$

Q27. Puissance reçue par R : $P(t) = \frac{V(t)^2}{R}$, ainsi $P = \langle P(t) \rangle = \frac{V_m^2}{2R}$ car $V(t) = V_m \cos(\omega_0 t + \phi)$.

Or, $V_m = \left| \underline{V}_m \right| = \frac{R\beta F_0}{\alpha \sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C_0^2}}$, donc
$$P = \frac{R\beta^2 F_0^2}{2\alpha^2 (1 + \omega_0^2 R^2 C_0^2)}$$

IV. Oscillateurs

IV.A.

Q28. $\underline{H}(j\omega)v_e = v_s$

Q29. $\underline{K}(j\omega)v_s + v_e = v_1$

Q30. $\underline{H}(j\omega)(-\underline{K}(j\omega)v_s + v_1) = v_s \Leftrightarrow \underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{H}(j\omega)}{1 + \underline{K}(j\omega)\underline{H}(j\omega)}$

Q31. Il faut que le gain $|\underline{A}|$ tende vers l'infini à la pulsation choisie ω , il faut donc que le module du dénominateur tende vers 0, et donc que $\underline{K}(j\omega)\underline{H}(j\omega) = -1$ à la pulsation choisie.

Q32. On en déduit que $|\underline{K}(j\omega)| |\underline{H}(j\omega)| = 1$ (R1)

Q33. On en déduit aussi que $\arg(\underline{K}(j\omega)) + \arg(\underline{H}(j\omega)) = \pi$ (R2)

IV.B.

Q34. On procède à des impédances équivalentes, puis à un diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = u_e \frac{Z_{R/C}}{Z_{R \rightarrow C} + Z_{R/C}} = u_e \frac{1}{1 + Z_{R \rightarrow C} \times \frac{1}{Z_{R/C}}}$$

Or $Z_{R \rightarrow C} = R + \frac{1}{jC\omega}$ et $\frac{1}{Z_{R/C}} = \frac{1}{R} + jC\omega$, donc

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

Q35. Gain : $|\underline{K}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$

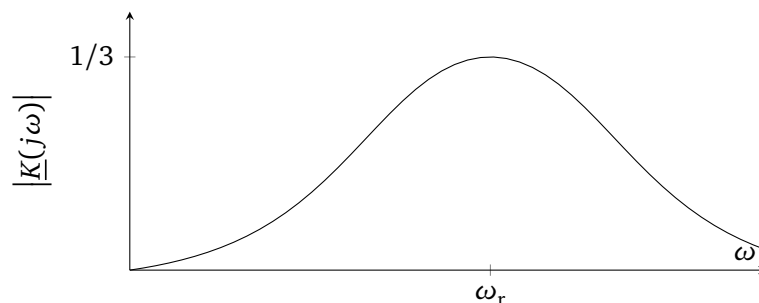
À basse fréquence, $|\underline{K}(j\omega)| \rightarrow 0$; à haute fréquence, $|\underline{K}(j\omega)| \rightarrow 0$ aussi.

Le maximum est atteint quand le dénominateur est minimal, donc quand la parenthèse s'annule :

$$RC\omega - \frac{1}{RC\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega_r = \frac{1}{RC}$$

Le gain vaut alors $|\underline{K}(j\omega_r)| = \frac{1}{3}$.

Avec ces données, on trace l'allure :



Q36. On a donné les réponses précédemment pour tracer l'allure : $\omega_r = \frac{1}{RC}$ et $|\underline{K}(j\omega_r)| = \frac{1}{3}$

IV.C.

Q37. $Z_{\text{serie}} = R + \frac{1}{jC\omega_0} = R + \frac{R}{j} = \boxed{R(1-j)}$

Q38. $\frac{1}{Z_{\text{par.}}} = \frac{1}{R} + jC\omega_0 = \frac{1}{R} + \frac{j}{R} = \frac{1+j}{R} \implies \boxed{Z_{\text{par.}} = \frac{R}{1+j}}$

Q39. L'ALI est idéal, donc l'intensité entrant dans la borne (+) est nulle. On effectue un diviseur de tension :

$$\frac{v}{v_s} = \frac{Z_{\text{par.}}}{Z_{\text{par.}} + Z_{\text{serie}}} = \frac{\frac{1}{1+j}}{(1-j) + \frac{1}{1+j}} = \frac{1}{(1-j)(1+j) + 1} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, $\left| \frac{v}{v_s} \right| = \frac{1}{3}$. On retrouve bien le gain du filtre à la pulsation de résonance précédente.

Q40. L'ALI est idéal et en régime linéaire : $V_+ = v = V_-$

Ainsi, par loi des nœuds (l'intensité entrant dans la borne (-) est nulle) :

$$\frac{v_e}{R_1} = \frac{v - v_s}{R_2} \implies \boxed{v = v_s + \frac{R_2}{R_1} v_e}$$

Q41. Ainsi, $\frac{v_s}{v_e} = \frac{v}{v_e} - \frac{R_2}{R_1} = \frac{v_s}{3v_e} - \frac{R_2}{R_1} \iff \frac{2v_s}{3v_e} = -\frac{R_2}{R_1} \iff \boxed{\underline{H}(j\omega_0) = -\frac{3R_2}{2R_1}}$

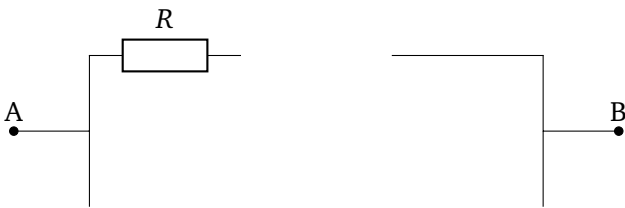
Q42. Pour $\omega = \omega_r = \omega_0$, si on veut un oscillateur, il faut avoir

- (R1) : $|\underline{K}(j\omega_0)| |\underline{H}(j\omega_0)| = 1 \iff \frac{1}{3} \times \frac{3R_2}{2R_1} = 1 \iff \boxed{R_2 = 2R_1}$
- (R2) : $\arg(\underline{K}(j\omega_0)) + \arg(\underline{H}(j\omega_0)) = \pi$ c'est bien vrai, car le premier est réel positif, le second est réel négatif.

Par exemple, on peut prendre $R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$.

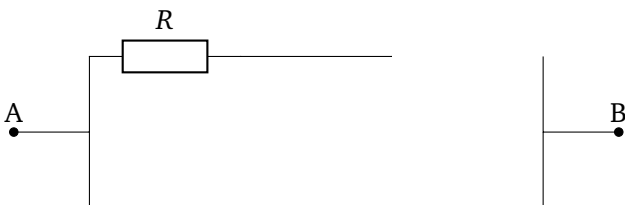
IV.D.

Q43. Circuit équivalent à basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$) :



Le quartz se comporte à basse fréquence comme un interrupteur ouvert. Plus précisément, un modèle équivalent serait capacitif (association parallèle de C et C_0).

Circuit équivalent à haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$) :



Le quartz se comporte à basse fréquence comme un fil idéal. Son impédance tend vers 0.

Q44. Quand $\omega \rightarrow 0$, on retrouve une divergence de l'impédance (traduite ici sur la partie imaginaire négative : le fonctionnement est purement capacitif).

L'impédance équivalente du modèle sans résistance est telle que $\frac{1}{\underline{Z}} = jC_0\omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = jC_0\omega + \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2}$

Ainsi : $\underline{Z} = -j \frac{1 - LC\omega^2}{C\omega + C_0\omega(1 - LC\omega^2)}$ D'où : $Im(\underline{Z}) = -\frac{1 - LC\omega^2}{C\omega + C_0\omega(1 - LC\omega^2)}$

Il existe une pulsation ω_0 telle que l'impédance s'annule, c'est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Il existe une pulsation ω_1 où l'impédance diverge, telle que $\frac{1}{Im(\underline{Z})} \rightarrow 0$

Soit : $\frac{C\omega + C_0\omega(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \omega = 0$ ou $C + C_0(1 - LC\omega^2) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$ ou $\omega_1 = \sqrt{\frac{C + C_0}{LCC_0}}$

Q45. Le comportement du quartz est capacitif pour $\omega \in]0; \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et pour $\omega \in]\sqrt{\frac{C + C_0}{LCC_0}}; +\infty[$.