Lundi 16 septembre 2024

PSI* 2024-2025, Devoir surveillé de Mathématiques n°1

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

Question de cours, Exercices proches du cours

1°) Enoncer le théorème des accroissements finis.

2°) Donner le développement limité en $x = 0$, à l'ordre 2 de : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1+e^x}$

3°) Calculer $A = \int\limits_0^\pi sin^3(x)cos^2(x)dx$

Problème 1

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. On note Γ la représentation graphique de f.

Partie A

1°) Montrer que f est une fonction paire.
Que peut-on en déduire pour Γ ?

2°) Dresser le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$

3°) a) Donner un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$
3°) b) Déterminer trois réels a, b, et c tels que, au voisinage de $+\infty$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(\frac{1}{x})$
3°) c) Montrer que : $\forall x \geq 0$, $f(x) - x \leq 0$
3°) d) Que peut-on en déduire pour Γ ?

4°) a) Donner le développement limité en $x = 1$, à l'ordre 1, de $f(x)$
4°) b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point d'abscisse 1.

5°) Tracer Γ en tenant compte de l'étude précédente.

Partie B

Soit u_0 un réel strictement positif. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = f(u_n)$

6°) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus est décroissante.

7°) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
7°) b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Partie C

On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} (f(x) - x)dx$

8°) Montrer que l'intégrale I est divergente.

Partie D

9°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \exists! x_n \in [0; +\infty[\ \ ,\ \ f(x_n) = n$

10°) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

11°) Montrer que, au voisinage de $+\infty$: $x_n \underset{n=+\infty}{\sim} n$

12°) a) Déterminer le réel λ tel que, au voisinage de $+\infty$: $x_n = n + \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$
12°) b) Déterminer les réels A et B tels que, au voisinage de $+\infty$: $x_n = n + \frac{\lambda}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{B}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})$

Problème 2

On pose, pour tout entier naturel n : $C_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(x))^{2n} dx$

1) Etablir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$

2) Etablir, pour tout entier naturel non nul n, les égalités : $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(x))^2 (cos(x))^{2n-2} dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$

On pose, pour tout entier naturel n : $D_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (cos(x))^{2n} dx$

3) Etablir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2 D_n$

4) En déduire, pour tout entier naturel non nul, l'égalité : $\frac{1}{n^2} = 2\big(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\big)$

5) a) Justifier, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration : $sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x$

5) b) En déduire, pour tout entier naturel n, la majoration : $D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}$

6) a) Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\big(\frac{D_0}{C_0} - \frac{D_n}{C_n}\big)$

6) b) Calculer C_0 et D_0.   6°) c) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Problème 3

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction numérique f, définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale définissant $f(x)$.

1) a) Soit $(x, y) \in I^2$ tel que : $x < y$. Montrer que : $\forall t \in [0, 1]$, $\frac{1}{y+t} \leq \frac{1}{x+t}$
1) b) Montrer que f est décroissante sur I.

2) Soit x_0 un nombre réel strictement positif quelconque.

2) a) Montrer que : $\forall x \in [\frac{x_0}{2}, +\infty[$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}$
2) b) En déduire que f est continue en x_0
2) c) En déduire que f est continue sur I.

3) a) Montrer que pour tour réel x strictement positif : $\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$
3) b) En déduire que : $f(x) \sim \frac{e-1}{x}$ au voisinage de $+\infty$

4) a) En utilisant les accroissements finis, déterminer un réel positif M tel que : $\forall t \in [0, 1]$, $|e^t - 1| \leq Mt$

4) b) Soit g la fonction numérique définie sur I par : $\forall x \in I$, $g(x) = \int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t} dt$
Montrer que g est bornée sur I.
4) c) Montrer que : $f(x) \sim (-ln(x))$ au voisinage de $x = 0^+$

5) Dans cette question, on se propose de calculer une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-2} près.

On introduit la fonction h définie sur $[0, 1]$ par la relation : $\forall t \in [0, 1]$, $h(t) = \frac{e^t}{1+t}$

On définit également deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(\frac{k}{n})$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(\frac{k+1}{n})$

5) a) Vérifier que la fonction h est croissante sur le segment $[0, 1]$.
5) b) Donner une interprétation géométrique des réels u_n et v_n.

5) c) Montrer que : $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $\frac{1}{n} h(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h(\frac{k+1}{n})$

5) d) Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| f(1) - \frac{u_n+v_n}{2} \right| \leq \frac{h(1)-h(0)}{2n}$
5) e) Donner une valeur explicite de n, notée n_0, telle que $\frac{u_{n_0}+v_{n_0}}{2}$ soit une valeur approchée de $f(1)$ à $\frac{10^{-2}}{2}$ près.

On exprimera n_0 à l'aide de $e = exp(1)$ et de la fonction partie entière.