PSI* 2024-2025

Pour le jeudi 3 octobre 2024

Devoir à la maison n°2 de Mathématiques

Code couleur :	noir	plutôt facile ou important, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (ou complément)
	rouge	assez difficile (ou si on a fait le reste)
	vert	difficile (ou si on a le temps)

On soignera particulièrement la rédaction sur les parties en noires.
Pour les autres parties, à condition de le signaler on pourra rédiger un peu plus rapidement (en particulier sur les parties rouges et vertes).

EXERCICE n°1

On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{e^t}{t+e^{2t}-1}$

1°) Etudier l'intégrablité sur $]0,1[$ de la fonction φ.

2°) Etudier l'intégrablité sur $[1,+\infty[$ de la fonction φ.

3°) Etudier l'intégrablité sur $]0,+\infty[$ de la fonction φ.

EXERCICE n°2

Discuter suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'existence de $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1+t^\alpha}{t^2+t^\alpha} dt$

Problème 1 : Une fonction définie à partir d'une intégrale

Présentation générale

Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'application : automatique, traitement du signal, etc.

On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

I) Définition de la fonction

1) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α.

2) Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers O^+, de la fonction définie sur $]0,1]$ par $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$.

3) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

On définit alors sur $]0,+\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

II) Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

4) Montrer que $f(1) = \ln(2)$, puis que $f(2) = 1 - \ln(2)$. On pourra remarquer que, pour tout $t \in [0,1]$:

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

5) Rappeler la formule de factorisation de $a^n - b^n$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $n \geqslant 1$:

$$1 - (-t)^n = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$$

6) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$f(n) = (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$

On pourra remarquer que, pour $n \geqslant 2$ et $t \in [0,1]$: $t^{n-1} = (-1)^{n-1}(-t)^{n-1}$.

7) Écrire une fonction python d'en-tête `def fEntier(n) :` qui calcule $f(n)$ à partir de la formule obtenue dans la question précédente et renvoie la valeur de $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On supposera la fonction `log` (pour ln) importée de la bibliothèque **numpy**.

III) Variations de f

8) Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

9) Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leqslant \beta$. Comparer, pour tout $t \in]0,1]$, t^α et t^β.

En déduire que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

10) Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0,1]$:

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t} \leqslant t^{x-1}.$$

En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

11) En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0.

12) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les ppints de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne $\ln(2) \simeq 0,7$).

IV) Équivalent de f en $+\infty$

13) Montrer que, pour $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}.$$

14) En utilisant le résultat de la question **Q24**, montrer que, pour $x > 1$:

$$f(x+1) + f(x) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x) + f(x-1).$$

15) En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Problème 2

En dehors de sa dernière question, la partie II est indépendante de la partie I.

Partie I - Intégrales généralisées de Dirichlet

1. Les sous-questions sont indépendantes.
   (a) On considère la fonction
   $$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$
   Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.
   On **admet** l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
   ii. Déterminer, pour $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} \mathrm{d}t$.
   (c) Donner le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $t \longmapsto \ln g(t)$.
   (d) On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
   Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   (a) Vérifier que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} \mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \mathrm{d}t$?
3. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel t, on pose $h_n(t) = \sin^n(t)$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   (a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t, on a : $|h_n^{(k)}(t)| \leqslant K$.
   (b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?
   ii. Établir l'égalité : $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.
   (c) Justifier, pour tout entier $k \in [\![0, n-2]\!]$, la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t$.
   (d) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} \mathrm{d}t$ et établir l'égalité
   $$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Pour tout réel t, établir l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}.$$

   (b) En déduire pour tout réel t l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin 2jt.$$

   (c) En déduire l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}.$$

5. *Étude asymptotique de la suite de terme général* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n} \mathrm{d}t$

   (a) Prouver que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n} \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   (b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   ii. En déduire $\displaystyle\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n} \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   On pourra, en utilisant le résultat de la question 1.(c), donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$ où $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

   (c) i. Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, on ait :

$$|e^{-u} - 1| \leqslant 2u.$$

   ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$, on ait :

$$-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0.$$

   On utilisera le résultat de la question 1.(c).

   iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n} \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) \mathrm{d}t.$$

   puis, toujours pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n} \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t \right| \leqslant 2\frac{\ln^4 n}{n}.$$

iv. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$.
On se souviendra du résultat de 1.(d).

Partie II - Montée d'une permutation de $[\![1,n]\!]$

Soit n un entier naturel non nul. On appelle *montée* d'une liste $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ d'entiers naturels **distincts deux à deux** toute sous-liste $(a_p,a_{p+1},\dots,a_q)$ avec $p\leqslant q$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} p=1 \quad \text{ou} \quad a_{p-1}>a_p \\ \text{et} \quad a_p<a_{p+1}<\ldots<a_q \quad \text{si} \quad p<q \\ \text{et} \quad q=n \quad \text{ou} \quad a_q>a_{q+1} \end{cases}$$

On note $\mathrm{M}(a)$ le nombre de montées de la liste a. Par exemple, les montées de la liste $a=(2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont $(2,5,7),(6),(1,4),(3,8)$ et donc $\mathrm{M}(a)=4$.

On définit de même la notion de *descente* d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $\mathrm{D}(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a=(2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont $(2),(5),(7,6,1),(4,3)$ et (8), d'où $\mathrm{D}(a)=5$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note S_n l'ensemble des n-listes d'éléments de $[\![1,n]\!]$ **distincts deux à deux**.

Il est clair que, pour toute liste a de S_n, on a $1\leqslant \mathrm{M}(a)\leqslant n$ et $1\leqslant \mathrm{D}(a)\leqslant n$.

Enfin, pour tout entier naturel k, on note $\mathrm{E}_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $\mathrm{E}_n(k)=\mathrm{Card}\{a\in\mathrm{S}_n|\mathrm{M}(a)=k\}$. On a donc $\mathrm{E}_n(0)=0$ ainsi que $\mathrm{E}_n(k)=0$ pour tout $k>n$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer les valeurs de $\mathrm{E}_n(1)$ et $\mathrm{E}_n(n)$.
   (b) Soit k un entier fixé compris entre 1 et n.
   Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $\mathrm{M}(a)=k$.
2. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n et toute liste a de S_n, la valeur de la quantité $\mathrm{M}(a)+\mathrm{D}(a)$.
   En notant, pour $i\in[\![1,n-1]\!]$, s_i la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de $(a_1,\dots,a_i)$, on évaluera en fonction du nombre s_i, la somme s_{i+1} des nombres de montées et de descentes de $(a_1,\dots,a_{i+1})$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. À toute liste $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ de S_n, on associe la liste
   $$\Psi(a)=(n+1-a_1,n+1-a_2,\dots,n+1-a_n).$$
   (a) Vérifier que l'application Ψ est une bijection de S_n sur S_n.
   (b) En déduire que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathrm{E}_n(k)=\mathrm{E}_n(n+1-k)$.
4. Calcul de $\mathrm{E}_n(2)$.
   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   (a) Quel est le nombre de couples (A,B) de parties **non vides** de $[\![1,n]\!]$ tels que
   $$A\cup B=[\![1,n]\!] \quad \text{et} \quad A\cap B=\emptyset \quad ?$$
   (b) Établir que : $\mathrm{E}_n(2)=2^n-(n+1)$.

5. *Une relation de récurrence*

   Soit n un entier naturel non nul. À toute liste $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ de S_{n+1}, on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $n+1$ de la liste a. Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3, 4, 1, 5, 6, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$ et si $a = (6, 3, 4, 1, 5, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$.

   (a) Soit $b = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de S_n. Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?

   (b) Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $b \in \mathrm{S}_n$ tels que $\mathrm{M}(b) = k$. Quels sont les valeurs possibles de $\mathrm{M}(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?

   (c) Établir, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

   $$\mathrm{E}_{n+1}(k+1) = (k+1)\mathrm{E}_n(k+1) + (n+1-k)\mathrm{E}_n(k).$$

   Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour $k > n$.

   (d) Donner, en détaillant le calcul de $\mathrm{E}_5(3)$, les valeurs de $\mathrm{E}_n(k)$ pour tous les couples d'entiers (n, k) tels que $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 5$. On consignera les résultats dans un tableau, n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne.

6. *La formule de Worpitzky*

   Établir, pour tout n entier naturel non nul et tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'égalité

   $$\mathrm{E}_n(k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n.$$

   On raisonnera par récurrence sur l'entier n.

7. *Une égalité miraculeuse*

   Justifier, pour tout n entier naturel non nul, l'égalité

   $$\mathrm{E}_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi}(2n-1)! \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t.$$