Chapitre 3 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé exercice 3.1

Montrer que $F = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \ , \ \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Correction

On sait que $E = C^{\infty}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
Comme $F \subset E$ on va montrer que F est un sous espace vectoriel de E.

Déjà F est non vide puisque la fonction nulle est dans F.

Deuxième point, soit $(f,g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors : $\int_0^1 (f+\lambda g)(t)dt$
$= \int_0^1 (f(t)+\lambda g(t))dt$
$= \int_0^1 f(t)dt + \lambda \int_0^1 g(t)dt$
$= 0 + \lambda 0$ car f et g sont dans F
$= 0$

On a donc $f + \lambda g \in F$

On a : $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall (f,g) \in F^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f+\lambda g \in F \end{cases}$ et donc d'après le cours F est un sous espace vectoriel de E.

Comme un sous espace vectoriel est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel alors F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Bilan : $\boxed{F = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \ , \ \int_0^1 f(t)dt = 0\} \text{ est un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel.}}$

Remarque : Autre méthode. On pose : $\begin{array}{cccc} \phi & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \int_0^1 f(t)dt \end{array}$

Grâce à la linéarité de l'intégrale on a que ϕ est une forme linéaire.
On remarque que : $F = ker(\Phi)$ et donc F est un sous espace vectoriel de E et donc un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Enoncé exercice 3.2

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} f_1(x) = x \\ f_2(x) = exp(x) \\ f_3(x) = cos(x) \end{cases}$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Correction

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \theta$ (avec θ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$)

Alors, pour x au voisinage de 0 :
$\lambda_1 x + \lambda_2 e^x + \lambda_3 cos(x) = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2(1 + x\frac{x^2}{2} + o(x^2)) + \lambda_3(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = 0$
$\Rightarrow \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_2 - \lambda_3)\frac{x^2}{2} + o(x^2) = 0$
$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{par unicité du DL} \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_3 = 0$

On a donc, d'après la définition du cours : (f_1, f_2, f_3) libre.

Enoncé exercice 3.3

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose $\forall P \in E$: $f(P) = (X+1)P' - 2P$
a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
b) Déterminer $ker(f)$ et $Im(f)$.

Correction

a) Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de la dérivation :
$f(P + \lambda Q) = (X+1)(P + \lambda Q)' - 2(P + \lambda Q) = (X+1)P' - 2P + \lambda((X+1)Q' - 2Q) = f(P) + \lambda f(Q)$
On a donc bien f linéaire, comme $d((X+1)P') \leq d(P)$ et $d(-2P) \leq d(P)$ alors $d(f(P)) \leq d(P)$ et on a donc bien $f(E) \subset E$.
Bilan : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$

b) $P = a + bX + cX^2 \in ker(f)$
$\Leftrightarrow f(P) = 0_E$
$\Leftrightarrow (X+1)(b + 2cX) - 2(a + bX + cX^2) = 0_E$
$\Leftrightarrow (b - 2a) + (b + 2c - 2b)X + (2c - 2c)X^2 = 0_E$ par identification

$\Leftrightarrow \begin{cases} b-2a=0 \\ 2c-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ c=a \end{cases} \Leftrightarrow P=a(1+2X+X^2)=a(X+1)^2$

On a donc $ker(f)=Vect((X+1)^2)$.

On remarque (calcul ci-dessus) que : $f(a+bX+cX^2)=(b-2a)+(2c-b)X \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $Im(f) \subset \mathbb{R}_1[X]$ Comme $f \in L(E)$, par le théorème du rang : $dim(E)=3=dim(ker(f))+dim(Im(f))$. Comme $dim(ker(f))=1$, on en déduit $dim(Im(f))=2$. Avec l'inclusion ci-dessus et l'égalité des dimensions on en déduit$Im(f)=\mathbb{R}_1[X]$.

Bilan : $\boxed{ker(f)=Vect((X+1)^2) \text{ et } Im(f)=\mathbb{R}_1[X]}$

Enoncé exercice 3.4

Soit f un endomorphisme d'un K espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$. On note $f^2=f \circ f$
a) Montrer que : $Im(f^2) \subset Im(f)$ et $ker(f) \subset ker(f^2)$
b) Montrer que : $Im(f^2)=Im(f) \Leftrightarrow ker(f)=ker(f^2)$

Correction

a) Soit $x \in E$. Alors :
$x \in Im(f^2) \Rightarrow \exists z \in E\ ,\ x=f(f(z)) \Rightarrow \exists z' \in E\ ,\ x=f(z')$ avec $z'=f(z)$ et donc $x \in Im(f)$
On a bien $Im(f^2) \subset Im(f)$

Soit $x \in E$. Alors :
$x \in ker(f) \Rightarrow f(x)=0_E \Rightarrow f^2(x)=0_E \Rightarrow x \in ker(f^2)$
On a bien $ker(f) \subset ker(f^2)$

On a donc $\boxed{Im(f^2) \subset Im(f) \text{ et } ker(f) \subset ker(f^2)}$

b) Le théorème du rang appliqué à f et f^2 donne : $\begin{cases} dim(E)=dim(ker(f))+dim(Im(f)) \\ dim(E)=dim(ker(f^2))+dim(Im(f^2)) \end{cases}$ et donc $dim(ker(f))+dim(Im(f))=dim(ker(f^2))+dim(Im(f^2)) \Leftrightarrow (1)$

Alors : $Im(f^2)=Im(f) \Leftrightarrow dim(Im(f^2))=dim(Im(f))$
puisque $Im(f^2) \subset Im(f)$
$\Leftrightarrow dim(ker(f^2))=dim(ker(f))$
avec la relation (1)
$\Leftrightarrow ker(f^2)=ker(f)$
puisque $ker(f) \subset ker(f^2)$

On a donc bien : $\boxed{Im(f^2)=Im(f) \Leftrightarrow ker(f)=ker(f^2)}$

Enoncé exercice 3.5

Soit n un entier vérifiant $n \geq 2$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On pose $\forall P \in E \ , \ \varphi(P) = \int\limits_0^1 f(t)dt$

a) Montrer que $ker(\varphi)$ est un hyperplan.

b) Donner une équation cartésienne de $ker(\varphi)$ dans la base canonique de E.

Correction

a) φ est une forme linéaire non nulle, donc par définition $\boxed{ker(\varphi) \text{ est un hyperplan de } E.}$

b) Si on note $(a_0, \ldots,_a n)$ les coordonnées d'un polynôme P de E, alors : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et

$\varphi(P) = \int\limits_0^1 (\sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k)dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_0^1 a_k t^k dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} a_k$

$\boxed{\text{Une équation de } ker(\varphi) \text{ dans la base canonique est donc } \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} a_k = 0}$

Enoncé exercice 3.6

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit H et H' deux hyperplan distincts de E. Déterminer la dimension de $H \cap H'$.

Correction

Posons $F = H \cap H'$ alors F est un sous-espace vectoriel de E

Supposons par l'absurde que $H + H' = H$. Alors on aurait $H' \subset H + H' = H$ et donc $H = H'$ ce qui n'est pas le cas.

On a donc $H \subset H + H'$ et cette inclusion est strict. On en déduit $dim(H + H') \geq dim(H) = n - 1$ et comme $dim(H + H') \leq n$ alors $dim(H + H') = n$

A l'aide de la formule de Grasmann on a : $dim(F) = dim(H \cap H') = dim(H) + dim(H') - dim(H \cup H') = (n-1) + (n-1) - n = n - 2$

On a donc $\boxed{dim(H \cap H') = n - 2}$