Feuille d'exercices n°12 : Chapitres 4 et 5

Exercice 113. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par*
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (3x+2y, 2x+y)$
a) Montrer que f est une application linéaire et déterminer la matrice de f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^2$
b) Montrer que f est inversible et déterminer f^{-1} sous la même forme que la définition de f.

Exercice 114. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
Déterminer $ker(A)$ et $Im(A)$

Exercice 115. *Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.*
On définit u l'application de E dans lui-même par $u(P) = P + (1-X)P'$
a) Montrer que u est un endomorphisme de E
b) Déterminer la matrice de u relativement à B la base canonique de E
c) Déterminer une base de $Im(u)$
d) Déterminer une base de $ker(u)$
e) Montrer que $ker(u)$ et $Im(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 116. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Soit φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ admettant A comme matrice relativement à la base canonique $B = (i,j)$.
On pose $u = 3i - j$ et $v = 3i + j$.
a) Montrer que $B' = (u,v)$ est une base de E.
b) Déterminer la matrice de φ relativement à B'.
c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 117. *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et B la base canonique de E.*
On pose $\forall P \in E \quad \phi(P)(X) = P(X+1)$
a) Déterminer A la matrice de ϕ relativement à B
b) Déterminer A^{-1}

Exercice 118. *a) Trouver une application linéaire injective mais non surjective.*
b) Trouver une application linéaire sujective mais non injective.

Exercice 119. *Soit $N \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = (0)$ Montrer que $I_3 + N$ est inversible*

Exercice 120. *($\star$)*
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
Montrer que : $A^2 = tr(A)A$
Donner une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$