# Feuille d'exercices n°11 : Chapitre 4

**Exercice 104.** *Soit $n \geq 2$ et $U$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1.*
*a) Calculer $U^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$*
*b) Calculer $(I_n + U)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$*

**Exercice 105.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
*a) Montrer que $A^2 - 4A - 5I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$*
*b) Déterminer, en fonction de $n$, le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 - 4X - 5$*
*c) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n$.*

**Exercice 106.** *Calculer les déterminants suivants :* $a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

**Exercice 107.** *En utilisant la ruse plutôt que Sarrus, donner sous forme factorisée l'expression de* $A = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ *et de* $B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$ *avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*

**Exercice 108.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0_{M_n(\mathbb{R})} & I_n \\ -I_n & 0_{M_n(\mathbb{R})} \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ *Déterminer $det(A)$*

**Exercice 109.** *($\star$) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.*
*Montrer que $det(A^2 + B^2) \geq 0$*

**Exercice 110.** *Soit $M$ une matrice antisymétrique de $M_{2n+1}(\mathbb{R})$. Calculer $det(M)$.*

**Exercice 111.** *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq b$. Soit* $D = \begin{pmatrix} c & b & \dots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ *avec $n \geq 2$*
*Soit $U$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1.*
*On pose $\forall h \in \mathbb{R} \quad P(h) = det(D + hU)$*
*a) Montrer que $P \in \mathbb{R}_1[X]$*
*b) Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$*
*c) Calculer $det(D)$.*
*d) Calculer $det(D)$ dans le cas $a = b$*

**Exercice 112.** *($\star$) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :* $\delta_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *(déterminant d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$)*
*Déterminer $\delta_n$ en fonction de $n$.*