Feuille d'exercices n°10 : Chapitres 3 et 4

Exercice 94. *($\star$) Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$ contient au moins une matrice inversible.*

Exercice 95. *($\star$) Soit E un K espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.*
Soit $p \in [\![1;n]\!]$, H_1, ..., H_p des hyperplans de E.
Montrer que : $dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p) \in [\![n-p;n-1]\!]$

Exercice 96. *Déterminer le rang de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 97. *Déterminer suivant $a \in \mathbb{R}$ le rang de* $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 98. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$
a) Calculer A^TA, AA^T et A^2
b) A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}
c) Calculer $A^{64216541355687}$

Exercice 99. *Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique et antisymétrique. Que dire de A ?*

Exercice 100. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Ecrire A comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 101. *Inverser les matrices suivantes :* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 102. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et $N = A - D$*
a) Calculer N^k pour $k \in \mathbb{N}$
b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 103. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
a) Montrer que : $A^2 + A - 6I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad A^n = a_nA + b_nI_2$
En particulier donner les valeurs de a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 et b_2
On donnera aussi deux relations de récurrences liant a_{n+1} et b_{n+1} à a_n et b_n
c) On pose $A_n = 2a_n + b_n$ et $B_n = -3a_n + b_n$
Montrer que l'on définit ainsi deux suites géométriques.
d) En déduire a_n et b_n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$