Feuille d'exercices n°9 : Chapitre 3

Exercice 85. *Soit les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *suivants :* $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}-8\\6\\11\end{pmatrix}$ *et* $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
a) Montrer que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *est liée et trouver une combinaison linéaire (à coefficients non tous nuls) liant ces vecteurs.*
b) Montrer que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{x})$ *est libre.*

Exercice 86. *On pose* $\forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} f_1(x)=1\\ f_2(x)=exp(x)\\ f_3(x)=sin(x)\\ f_4(x)=cos(x)\end{cases}$
Montrer que (f_1,f_2,f_3,f_4) *est une famille libre de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 87. *On pose* $\forall x\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} f_1(x)=1\\ f_2(x)=cos(x)\\ f_3(x)=cos(2x)\\ f_4(x)=cos^2(x)\end{cases}$
a) Montrer que (f_1,f_2,f_3) *est une famille libre de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
b) Montrer que (f_1,f_2,f_3,f_4) *est une famille liée de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 88. *On pose* $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in\mathbb{R}\quad f_n(x)=exp(nx)$
Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ *la famille* $(f_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 89. ($\star$) *On pose* $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in\mathbb{R}\quad f_n(x)=cos(nx)$
Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ *la famille* $(f_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 90. *Soit* f *l'application définie sur* $E=\mathbb{R}_2[X]$ *par* $\forall P\in E\ f(P)=P-X^2P''$
a) Montrer que f *est un endomorphisme de* E.
b) Montrer que f *est une symétrie.*

Exercice 91. *Soit* $n\geq 3$ *et* f *l'application définie sur* $E=\mathbb{R}_n[X]$ *dans* E *définie par*
$\forall P\in E\ f(P)$ *est le reste de la division euclidienne de* P *par* $R=X^2-3X+7$
a) Montrer que f *est un endomorphisme de* E.
b) Montrer que f *est une projection.*

Exercice 92. *($\star$) Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels et* $u,v\in L(E,F)$. *Montrer que :*
$ker(u)\subset ker(v)\Leftrightarrow \exists f\in L(F)\ ,\ v=f\circ u$

Exercice 93. *($\star$) Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie, soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur F *et* G *pour qu'il existe* $u\in L(E)$ *tel que* $Ker(u)=F$ *et* $Im(u)=G$.