# Chapitre 4 : Exemples d'exercices corrigés

## Enoncé, exercice 4.1

Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

## Correction

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = X \\ x + z = Y \\ x + y + z = Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - X \\ z = Y - x \\ x + (x - X) + (Y - x) = Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = X - Y + Z \\ y = -Y + Z \\ z = -X + 2Y - Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On a donc : $\boxed{P \text{ inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

# Enoncé, exercice 4.2

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $V = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

# Correction

$V = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ On fait $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & (y-x)(y+x) \\ 0 & z-x & (z-x)(z+x) \end{vmatrix}$$

On factorise la deuxième ligne par $y - x$ et la troisième par $z - x$

$$V = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & x+z \end{vmatrix}$$

Puis par un déterminant par blocs donne : $V = \begin{vmatrix} 1 & x+y \\ 1 & x+z \end{vmatrix} = (x+z) - (x+y) = z - y$

On a donc : $\boxed{V = (y-x)(z-x)(z-y)}$

Remarque : On peut aussi remarquer que c'est un déterminant de Vandermonde.

# Enoncé, exercice 4.3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

On pose $P_n(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & X + a_n \end{vmatrix}$

$P_n(X)$ est le déterminant d'une matrice carrée de $M_{n+1}(\mathbb{R})$

Déterminer une expression développée de $P_n(X)$

# Correction

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{R}$ que : $P_n(X) = X^{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$

Initialisation :
$P_0(X) = det\big(\big(X + a_0\big)\big) = X + a_0$
$P_1(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ a_0 & X + a_1 \end{vmatrix} = X(X + a_1) + a_0 = X^2 + a_1 X + a_0$
La récurrence est bien initialisée.

Hérédité : Pour $n \geq 1$, développons $P_n(X)$ par rapport à la première colonne. Alors :

$$P_n(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & X + a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & -1 \end{vmatrix}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang précédent (et en décalant la suite) :

$P_n(X) = X(X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k) + (-1)^n a_0 (-1)^n$ mais $(-1)^n(-1)^n = 1$
$P_n(X) = X^{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^{k+1} + a_0$
$P_n(X) = X^{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$

Conclusion : On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;\; P_n(X) = X^{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k}$

# Enoncé, exercice 4.4

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ et on considère $B = (u, v, w)$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $B$ est une base de $E$.

# Correction

Notons $B_C$ la base canonique de $E$ et calculons le déterminant de $B$ relativement à $B_C$.
$det_{B_C}(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ par Sarrus.
On en déduit que $B$ est une base de $E$.

# Enoncé, exercice 4.5

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui a $(x,y,z)$ associe $(x+2y+z, x-y+z)$

1°) Montrer que $f$ est linéaire.

2°) Déterminer la matrice de $f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

3°) Déterminer $ker(f)$ et $Im(f)$.

Soit la base de $\mathbb{R}^3$ : $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ et la base de $\mathbb{R}^2$ : $C = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

4°) Déterminer $T$ la matrice de $f$ relativement aux bases $B$ et $C$.

# Correction

1°) Soit $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(x,y,z) + \lambda(x',y',z'))$
$= f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda(')$
$= (x+\lambda x' + 2(y+\lambda y') + z + \lambda z', x+\lambda x' - (y+\lambda y') + z + \lambda z')$
$= (x+2y+z, x-y+z) + \lambda(x'+2y'+z', x'-y'+z')$
$= f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z')$

On a donc : $\forall((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ , $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$f(x,y,z) + \lambda(x',y',z')) = f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z')$

On en déduit que $\boxed{f \text{ est linéaire.}}$

Remarque : on peut aussi utiliser la relation du 2°).

2°) Si on note $(X,Y) = f(x,y,z)$ alors $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

La matrice de $f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

3°) $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{R^2} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y+z=0\\x-y+z=0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\z=-x\end{cases}$

On en déduit que $ker(f)=vect(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix})$

Par le théorème du rang : $dim(ker(f))+dim(Im(f))=dim(\mathbb{R}^3)$ et comme $dim(ker(f))=1$ alors $dim(Im(f))=2$
Mais $Im(f)\subset\mathbb{R}^2$ et donc $Im(f)=\mathbb{R}^2$

Donc $\boxed{ker(f)=vect(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}) \text{ et } Im(f)=\mathbb{R}^2}$

4°) Si on note $P$ la matrice de passage de la base canonique à $B$ et $Q$ la matrice de passage de la base canonique à $C$.

Alors, par la formule de changement de bases : $T=Q^{-1}AP$

Après calculs : $\boxed{T=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&-1&1\end{pmatrix}}$

---

# Enoncé, exercice 4.6

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B=(i,j,k)$, on considère l'hyperplan $P=vect(u,v)$ avec $u=2i+j+k$ et $v=i+k$.
Soit $p$ la projection sur $P$ parallèlement à $vect(w)$ avec $w=i-j+k$.

1°) Donner une équation cartésienne de $P$.

2°) Déterminer la matrice relativement à la base canonique de $p$.

---

# Correction

1°) $P$ a une équation de la forme $ax+by+cz=0$

$u,v\in P \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b+c=0\\a+c=0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}c=-a\\b=-a\end{cases}$

En prenant $a=1$, on a que $\boxed{x-y-z=0 \text{ est une équation cartésienne de } P.}$

2°) Par définition et linéarité de $p$ :
$u\in P\Rightarrow p(u)=u\Rightarrow p(2i+j+k)=2i+j+k\Rightarrow 2p(i)+p(j)+p(k)=2i+j+k$
$v\in P\Rightarrow p(v)=v\Rightarrow p(i+k)=i+k\Rightarrow p(i)+p(k)=i+k$
La projection est se fait parallèlement à $vect(w)$ donc
$p(w)=0\Rightarrow p(i-j+k)=0_E\Rightarrow p(i)-p(j)+p(k)=0_E$

On a donc le système : $\begin{cases}2p(i)+p(j)+p(k)=2i+j+k\\p(i)+p(k)=i+k\\p(i)-p(j)+p(k)=0_E\end{cases}$ on fait $L_2-L_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p(i)+p(j)+p(k)=2i+j+k \\ p(i)+p(k)=i+k \\ p(j)=i+k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p(i)+p(k)=i+j \\ p(i)+p(k)=i+k \qquad \text{on fait } L_1-L_2 \\ p(j)=i+k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(i)=j-k \\ p(k)=i-j+2k \qquad \text{on fait } L_1-L_2 \\ p(j)=i+k \end{cases}$$

On en déduit que la matrice de $p$ relativement à la base canonique vaut $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

---

# Enoncé, exercice 4.7

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère l'endomorphisme $f$ admettant $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

---

# Correction

On remarque que $A^2=A$ et donc que $f^2=f$ et donc que $f$ est une projection.
D'après le cours, c'est la projection sur $ker(f-Id_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $ker(f)$

Recherche de $ker(f-Id_{\mathbb{R}^3})$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x+3y+z \\ -5x+3y+z=0 \\ -5x+3y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -5x+3y+z=0$$

Recherche de $ker(f)$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ -5x+4y+z=0 \qquad \text{on fait } L_1-L_2 \\ -5x+3y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=y \end{cases}$$

On a donc $f$ qui est :

$\boxed{\text{le projecteur sur le plan } -5x+3y+z=0 \text{ parallèlement à la droite } vect(i+j+k)}$

---