Chapitre 4 : Calcul matriciel, algèbre linéaire et matrices

Remarque préliminaire : dans ce chapitre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Calcul matriciel

1.1 Rappels, notations

Définition. *Soit n et p deux entiers naturels non nuls.*
Alors on appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans K, toute famille d'éléments de K indéxée par $[\![1..n]\!] \times [\![1..p]\!]$.

Remarques. *On parle alors de matrice de taille (n,p) ou de taille $n \times p$.*

On note $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1..n]\!]\times[\![1..p]\!]}$ ou encore $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ ou encore $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & an,p \end{pmatrix}$

On dit que $a_{i,j}$ est le $(i,j)^{ime}$ terme de A.

Le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est la j^{ime} colonne de A.

Le vecteur ligne $\begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est la i^{ime} ligne de A.
Si $n = p$ on a une matrice carrée.
On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices n lignes, p colonnes.
Si $n = p$ on pose $M_{n,p}(K) = M_n(K)$.

1.2 Somme et multiplication par un scalaire

1.2.1 Somme

Définition. *Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(K)$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(K)$. Soit $\lambda \in K$. Alors on pose $C = A+\lambda B$ la matrice $C = (c_{i,j})$ de $M_{n,p}(K)$ définie par $\forall i \in [\![1..n]\!]\ \forall j \in [\![1..p]\!]\ ,\ c_{i,j} = a_{i,j} + \lambda b_{i,j}$.*

1.2.2 Structure vectorielle

Lemme. *$(M_{n,p}(K), +, \ )$ est un K espace vectoriel.*

preuve : cf première année

1.3 Produit matriciel

1.3.1 Produit

Définition. *Soit n,p,q trois entiers naturels non nul.*
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(K)$ Soit $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} \in M_{p,q}(K)$
Alors on définit le produit AB comme la matrice $C = (c_{i,j}) = AB \in M_{n,q}(K)$ ou
$\forall i \in [\![1,n]\!]\ \forall j \in [\![1,q]\!]\ ,\ c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$

Remarques. *Attention à la compatibilité des formats.*
Attention le produit n'est pas commutatif.

DESSIN :

1.3.2 Produit d'une matrice par un vecteur colonne ou un vecteur ligne

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exemple. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.4 Transposition

1.4.1 Définition, notation

Définition. *Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $M_{n,p}(K)$ alors on appelle matrice transposée de A et on note A^T la matrice de $M_{p,n}(K)$ de $(i,j)^{ime}$ coefficient $a_{j,i}$.*

Exemple. $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B^T =$

1.4.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définitions. *Soit $A \in M_n(K)$.*
Alors on dit que A est symétrique si et seulement si $A = A^T$.
Alors on dit que A est antisymétrique si et seulement si $A = -A^T$.
On note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Remarque. *Il faut, bien sûr, des matrices carrées.*

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$ *est symétrique*
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ -2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique*

1.4.3 Propriétés

Lemme. *Soit $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :* $\begin{cases} (A^T)^T = A \\ (AB)^T = B^T A^T \end{cases}$.

Soit $A, B \in M_{n,p}(K)$ alors : $(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T$

preuve :

1.5 Rang d'une matrice

Définition. *Soit $A \in M_{n,p}(K)$. Alors on définit le rang de A comme le rang de la famille des colonnes de A, dans $M_{n,1}(K)$.*

Lemme. *Soit A une matrice.*
$rg(A) = rg(A^T)$ On peut ajouter à une ligne (ou une colonne) de A une combinaison linéaire des autres sans changer le rang de A.
On peut échanger deux lignes ou deux colonnes de A sans changer le rang de A.
On peut multiplier une ligne ou une colonne de A sans changer le rang de A.

1.6 Inverse d'une matrice

1.6.1 Définition

Soit $A \in M_n(K)$. Alors on dit que A est **inversible**

si et seulement si $\exists B \in M_n(K)$, $AB = BA = I_n$ avec $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarques. *Si A est inversible on note A^{-1} l'inverse de A (B dans la définition ci-dessus).*
On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$.
Cet ensemble est stable par inversion et produit (on dit que c'est un groupe dont I_n est l'élément neutre).
Rappel : $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible $\Leftrightarrow rg(A) = n$

1.6.2 Une méthode de calcul de l'inverse

On écrit le système $AX = Y$ avec X et Y deux vecteurs colonnes. On inverse le système et on en déduit A^{-1}.

Remarques. *On peut aussi utiliser les opérations élémentaires. Passer par la comatrice est H.P.*

1.6.3 Exemple

Calcul de l'inverse de $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 Déterminant d'une matrice carrée

2.1 Définition

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ appelée **déterminant**, telle que :*

1. *le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes*
2. *l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1*
3. *le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1*

2.2 Notations

Si $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ on note $det(A)$ ou encore $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ le déterminant de A.

2.3 Cas particulier des dimensions 2 et 3

Théorème . $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - dbi - ahf.$

Remarques. *Règle de Sarrus, uniquement dimension 3.*
En dimension n la formule comporte $n!$ termes (24 en dimension 4 !!).

2.4 Opérations élémentaires

Lemme. *Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in K$ alors :*

1. $det(A^T) = det(A)$
2. $det(AB) = det(A)det(B)$
3. $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
4. *l'échange de deux colonnes (ou de deux lignes) de A change le signe du déterminant*
5. *on peut ajouter à une colonne (ou une ligne) de A une combinaison linéaire des autres colonnes, sans changer le déterminant de A.*
6. *si A admet deux colonnes (ou deux lignes) égales alors $det(A) = 0$*
7. *le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne et par rapport à chaque ligne*

2.5 Matrices triangulaires

Lemme. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.*

Remarques. *En appliquant le pivot de Gauss, on peut calculer le déterminant par opérations élémentaires (de manière algorithmique, donc informatique).*
En particulier le déterminant d'une matrice diagonale est égale au produit de ses termes diagonaux.

preuve :

2.6 Inverse

Théorème . *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$*. Alors :*
A *est inversible* $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$
De plus si A *est inversible alors* $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

preuve :

2.7 Déterminant par blocs

Théorème . *Soit* $A \in M_p(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$, $C \in M_q(K)$ *alors :* $det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{M_{q,p}(K)} & C \end{pmatrix}) = det(A)det(C)$

2.8 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème . *Soit* $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$*. Alors :* $\begin{cases} \forall i \in [\![1;n]\!] \ , \ det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \\ \forall j \in [\![1;n]\!] \ , \ det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \end{cases}$

ou $\Delta_{i,j}$ *est le déterminant de la matrice de* $M_{n-1}(\mathbb{K})$ *obtenue en supprimant à* A *sa* $i^{ième}$ *ligne et sa* $j^{ième}$ *colonne.*
Dans la première formule on dit que l'on développe $det(A)$ *par rapport à sa* $i^{ième}$ *ligne, dans la deuxième formule on dit que l'on développe* $det(A)$ *par rapport à sa* $j^{ième}$ *colonne.*

Exemple. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2.9 Complément : Déterminant de Vandermonde

2.9.1 Définition

Soit $n \geq 2$ et $(a_1, ..., a_n) \in K^n$. Alors on appelle déterminant de Vandermonde le déterminant (d'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$) suivant : $V(a_1, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

2.9.2 Théorème

Théorème : $V(a_1, ..., a_n) = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

2.9.3 Preuve

3 Interprétation vectorielle des matrices

3.1 Matrice d'un vecteur dans une base

Définition. *Soit E un K espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.*
Soit $x \in E$, alors on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Alors, $Mat_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelée matrice des coordonnées de x dans B.

Définition. *Soit E un K espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.*
Soit $S = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E.
Alors on appelle matrice de S dans B la matrice de $M_{p,n}(K)$ dont la j-ième colonne est $Mat_B(x_j)$.
Autrement dit : $Mat_B(S) = (x_{i,j})$ avec $x_j = \sum_{k=1}^{n} x_{i,j} e_i$.

Exemple. *Matrice de $(1 + X + X^2, 1 - X)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$*

3.2 Matrice d'une application linéaire

3.2.1 Cas général

Définition. *Soit E un K espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.*
Soit F un K espace vectoriel et $B' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
Soit $\phi \in L(E, F)$.
Alors on appelle matrice $Mat_{B,B'}(\phi)$ de ϕ relativement à B et B', la matrice de la famille $(\phi(e_j))_{1 \leq j \leq n}$ dans la base B'.

Remarques. *On rappelle que ϕ est entièrement déterminer par l'image des vecteurs d'une base de B.*
$\begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & M_{p,n}(K) \\ \phi & \mapsto & Mat_{B,B'}(\phi) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*
On a donc $\forall j \in [\![1; n]\!]$ $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} m_{i,j} f_i$ avec $Mat_{B,B'}(\phi) = (m_{i,j})$

Exemple. *Matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de*
$\phi : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x - y - 2z)$

3.2.2 Cas particulier

Si $E = F$ et $B = B'$ alors ϕ est un endomorphisme et on note $Mat_{B,B'}(\phi) = Mat_B(\phi)$

Exemple. *Matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de $\phi : P \mapsto Q$ avec $Q(X) = XP'(X + 1)$*

3.3 Utilisation du produit matriciel

3.3.1 Premier théorème

Théorème . *Soit E un K espace vectoriel et B une base de E.*
Soit F un K espace vectoriel et B' une base de F.
Soit $\phi \in L(E, F)$.

Alors, pour tout $x \in E$ on a : $Mat_{B'}(\phi(x)) = Mat_{B,B'}(\phi) Mat_B(x)$

3.3.2 Deuxième théorème

Théorème . *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et B une base de E.*
Soit F un K espace vectoriel de dimension finie et B' une base de F.
Soit G un K espace vectoriel de dimension finie et B'' une base de G.
Soit $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$.

Alors on a : $Mat_{B,B''}(g \circ f) = Mat_{B',B''}(g) Mat_{B,B'}(f)$

Remarque. *Dans le cas particulier ou $E = F = G$ et $B = B' = B''$ alors : $Mat_B(g \circ f) = Mat_B(g) Mat_B(f)$*

3.4 Changement de bases

3.4.1 Matrices de passage

Définition. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie. Soit B et B' deux bases de E. Alors on appelle matrice de passage de la base B à la base B' la matrice $Mat_B(B')$ On note $P_B^{B'}$ cette matrice*

Remarques. *On a : $P_B^{B'} = Mat_B(B') = Mat_{B',B}(Id_E)$, $P_B^{B'}$ est inversible et $(P_B^{B'})^{-1} = P_{B'}^{B}$*
Si B, B' et B'' sont trois bases de E alors : $P_B^{B''} = P_B^{B'} P_{B'}^{B''}$

3.5 Formules de changements de bases

3.5.1 Formule de changement de base pour un vecteur

Lemme. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et soit B et B' deux bases de E.*
Alors pour tout vecteur x de E : $Mat_B(x) = P_B^{B'} Mat_{B'}(x)$

3.5.2 Formule de changement de base pour une application linéaire

Lemme. *Soit E et F deux K espace vectoriel de dimension finie, soit B et B' deux bases de E, soit C et C' deux bases de F Soit $\phi \in L(E,F)$. Alors $Mat_{B,C}(\phi) = P_C^{C'} Mat_{B',C'}(\phi)(P_B^{B'})^{-1}$*

3.5.3 Formule de changement de base pour un endomorphisme

Lemme. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, soit B et B' deux bases de E.*
Soit $\phi \in L(E)$. Alors $Mat_B(\phi) = P_B^{B'} Mat_{B'}(\phi)(P_B^{B'})^{-1}$

Exemple. $\text{Soit } f \; : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\frac{x+y}{3}, \frac{2x+2y}{3}) \end{array}$
Matrices dans la base canonique et dans la base $((1,1),(1,-1))$

4 Utilisation du déterminant

4.1 Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base

4.1.1 Définition

Définition. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et S une famille de $dim(E)$ vecteurs de E.*
Alors on appelle déterminant de S **relativement à** *B la valeur suivante : $det_B(S) = det(Mat_B(S))$*

4.1.2 Propriétés

Lemme. *S est une base $\Leftrightarrow det_B(S) \neq 0$*

4.2 Déterminant d'un endomorphisme

4.2.1 Définition

Définition. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $\phi \in L(E)$.*
On appelle déterminant de ϕ la valeur suivante $det(\phi) = det(Mat_B(\phi))$ avec B une base quelconque de E.

Remarque. *Bien sûr, la valeur de $\det(\phi)$ est indépendantes du choix de B et résulte de la formule de changement de bases pour un endomorphisme et du fait que 2 matrices semblables ont même déterminant.*

4.2.2 Propriétés

Lemme. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in L(E)$ et $\lambda \in K$.*

$$\text{Alors : } \begin{cases} det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ est un automorphisme} \\ det(f \circ g) = det(f)det(g) \\ det(\lambda f) = \lambda^{dim(E)} det(f) \end{cases}$$

Remarques. *Si f est bijective $det(f^{-1}) = det(f)^{-1}$*
Si B est une base de E et S une famille de $dim(E)$ vecteurs de E alors $det_B(f(S)) = det(f)det_B(S)$, $det(f)$ peut alors être vu comme un coefficient de dilatation.

Sommaire