Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°2

EXERCICE n°1

1°) $\forall t > 0$, $e^{2t} > 1$ donc $t + e^{2t} - 1 > 0$ et donc φ est continue sur $]0, +\infty[$, en particulier φ est continue sur $]0, 1]$.
L'intégrabilité de φ sur $]0; 1[$ pose donc problème uniquement en 0.
Au voisinage de 0 : $\varphi(t) = \frac{e^t}{t+e^{2t}-1} = \frac{1+o(1)}{t+(1+2t+o(t))-1} = \frac{1+o(1)}{3t+o(t)} \sim \frac{1}{3t} > 0$
Or $t \mapsto \frac{1}{3t}$ n'est pas intégrale sur $]0, 1]$ (par Riemann), donc par équivalent φ n'est pas intégrable en 0.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ n'est pas intégrable sur }]0, 1[}$

2°) φ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrabilité de φ sur $[1; +\infty[$ pose problème uniquement en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$: $\varphi(t) \sim \frac{e^t}{e^{2t}} \sim e^{-t} > 0$
Or $t \mapsto e^{-t}$ est une fonction de référence intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par équivalent φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } [1; +\infty[}$

3°) Compte tenu du 1°) : $\boxed{\varphi \text{ n'est pas intégrable sur }]0; +\infty[}$

EXERCICE n°2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, posons : $\begin{array}{cccc} f & : & [1; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{1+t^\alpha}{t^2+t^\alpha} \end{array}$

Comme f est continue sur $[1; +\infty[$, l'existence de I pose problème uniquement en $+\infty$.
De plus, comme f est positive, l'existence de I est équivalente à l'intégrabilité de f en $+\infty$.

On va distinguer plusieurs cas, utiliser $t^\alpha = exp(\alpha ln(t))$ et travailler au voisinage de $+\infty$
On utilise aussi que, au voisinage de $+\infty$: $a < b \Rightarrow t^a = o(t^b)$
En effet : $\frac{t^a}{t^b} = t^{a-b} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$
Tout les équivalents ci-dessous sont au voisinage de $+\infty$.

Cas 1 : $\alpha < 0$
Alors $t^\alpha \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $1 + t^\alpha \sim 1$ et $t^2 + t^\alpha \sim t^2$.
On a donc $f(t) \sim \frac{1}{t^2} > 0$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, alors, par équivalent f est intégrable en $+\infty$.

Cas 2 : $\alpha = 0$
Alors $f(t) = \frac{2}{1+t^2} \sim \frac{2}{t^2} > 0$.
Comme au cas 1, f est intégrable en $+\infty$.

Cas 3 : $0 < \alpha < 2$
Alors $t^\alpha \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $1 + t^\alpha \sim t^\alpha$.
De plus $\alpha < 2$ et donc $t^2 + t^\alpha \sim t^2$. On a alors : $f(t) \sim \frac{t^\alpha}{t^2} \sim \frac{1}{t^{2-\alpha}} > 0$
Alors par équivalent avec les intégrales de Riemann en $+\infty$
f est intégrable en $+\infty \Leftrightarrow 2 - \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$

Cas 4 : $\alpha = 2$

Alors $f(t) = \frac{1+t^2}{2t^2} \sim \frac{1}{2} > 0$ et donc f n'est pas intégrable en $+\infty$ car $\int\limits_1^{+\infty} 2dt$ est divergente.

Cas 5 : $\alpha > 2$

Alors $t^\alpha \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $1 + t^\alpha \sim t^\alpha$.

De plus $\alpha > 2$ et donc $t^2 + t^\alpha \sim t^\alpha$. On a alors : $f(t) \sim \frac{t^\alpha}{t^\alpha} \sim 1 > 0$ et donc, comme au cas 4, f n'est pas intégrable en $+\infty$

Bilan : f intégrable en $+\infty \Leftrightarrow \left[\alpha < 0 \text{ ou } \alpha = 0 \text{ ou } \begin{cases} 0 < \alpha < 2 \\ \alpha < 1 \end{cases}\right] \Leftrightarrow \alpha < 1$

On a donc : $\boxed{I \text{ existe} \Leftrightarrow \alpha < 1}$

Problème 1 : ccINP tsi 2023

1) D'après les intégrales de Riemann : $\boxed{\int\limits_0^1 t^\alpha dt \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > -1}$

Soit $\alpha > -1$ et $\epsilon > 0$, $\int\limits_\epsilon^1 t^\alpha dt = [\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_\epsilon^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{\epsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \underset{\epsilon\to0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha+1}$ car $\alpha + 1 > 0$

On a donc : $\boxed{\text{pour } \alpha > -1,\ \int\limits_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}}$

2) Au voisinage de $t = 0^+$: $1 + t \sim 1$ donc $\boxed{\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t=0^+}{\sim} t^{x-1}}$

3) $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t} = \frac{exp((x-1)ln(t))}{1+t}$ est continue sur $]0, 1]$ donc $\int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ ne pose problème qu'en $t = 0$.

Avec l'équivalent de Q17), comme les fonctions sont positives, on a : $\int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ qui est de même nature que $\int\limits_0^1 t^{x-1} dt$, c'est-à-dire convergente si et seulement si $x - 1 > -1 \Leftrightarrow x > 0$ (on a utilisé la question 1))

On a bien : $\boxed{\int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \text{ convergente si et seulement si } x > 0}$

4) • $f(1) = \int\limits_0^1 \frac{t^0}{1+t} dt = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [ln(1 + t)]_0^1 = ln(2)$

• $f(2) = \int\limits_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int\limits_0^1 \frac{1+t-1}{1+t} dt = \int\limits_0^1 (1 - \frac{1}{1+t}) dt = 1 - f(1) = 1 - ln(2)$

• On a bien : $\boxed{f(1) = ln(2) \text{ et } f(2) = 1 - ln(2)}$

5) • $\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ a^n - b^n = (a - b)\big(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\big)}$

• L'égalité précédente appliquée avec $a = 1$ et $b = (-t)$ donne :

$\boxed{\forall t \in [0, 1]\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ 1 - (-t)^n = (1 + t) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k}$

6)

$$f(n) = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}(-t)^{n-1}}{1+t}dt$$

$$= (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{(-t)^{n-1}}{1+t}dt$$

$$= (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{(-t)^{n-1}-1+1}{1+t}dt$$

$$= (-1)^{n-1}\left[\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n-1}}{1+t}dt\right]$$

on utilise maintenant 5) et on reconnaît $f(1)$

$f(n) = (-1)^{n-1}f(1) - (-1)^{n-1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k dt$ linéarité de l'intégrale

$$= (-1)^{n-1}f(1) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \int_0^1 t^k dt$$

$$= (-1)^{n-1}f(1) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$

On a donc : $\boxed{\forall n \geq 2 \ , \ f(n) = (-1)^{n-1}ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{1}{k+1}}$

7)

```
def fEntiern(n):
    s,p=0,1
    for k in range(n-1):
        p=-p
        s=s+p/(k+1)
    s=p*(s-log(2))
    return s
```

8) cf cours

9) Soit $t \in]0,1]$. On a donc $ln(t) \leq 0$
Donc :
$-1 < \alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha ln(t) \geq \beta ln(t) \Rightarrow exp(\alpha ln(t)) \geq exp(\beta ln(t)) \Rightarrow t^\alpha \geq t^\beta$

On a utiliser la croissance de exp.

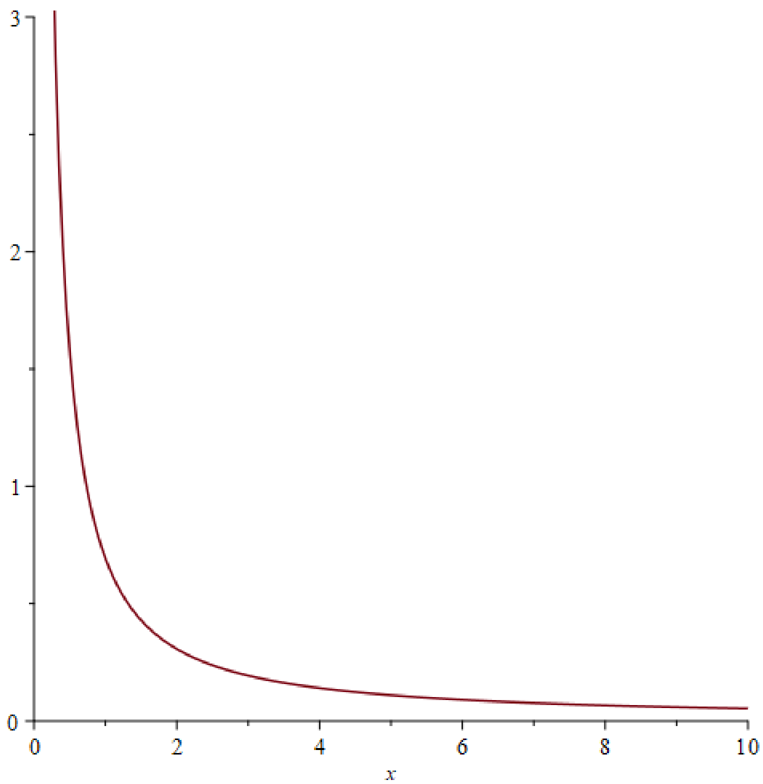
Soit $x, y \in]0,+\infty[$ tels que : $0 < x \leq y$.
En utilisant Q24) avec $\alpha = x-1$ et $\beta = y-1$ on obtient $t^{x-1} \geq t^{y-1}$ pour $t \in]0,1]$
Comme $\frac{1}{1+t} > 0$, alors : $\frac{t^{x-1}}{1+t} \geq \frac{t^{y-1}}{1+t}$
Par croissance de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt \geq \int_0^1 \frac{t^{y-1}}{1+t}dt$
On a donc : $0 < x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

On a donc : $\boxed{f \text{ décroissante sur }]0,+\infty[}$

10) $t \in]0,1] \Rightarrow 0 < t \leq 1 \Rightarrow 1 < 1+t \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} < 1$
Et comme $t^{x-1} > 0$: $\frac{t^{x-1}}{2} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} < t^{x-1}$

En intégrant entre 0 et 1, comme $\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$ on obtient : $\boxed{\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}}$

11) Comme $\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ on déduit par encadrements de la question précédente que : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$



12)

13) $f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t)}{1+t}dt = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$

On a bien : $\boxed{\forall x > 0 \ , \ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}}$

14) Comme f est décroissante sur $]0,+\infty[$ (Q24) alors : $\forall x > 1$, on a $x, x-1$ et $x+1$ dans le domaine de f et :
$f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$ et donc en ajoutant $f(x)$ on a :
$\boxed{\forall x > 1 \ , \ f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1)}$

15) En combinant Q13) et 14) : $\frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1} \Rightarrow 1 \leq 2xf(x) \leq \frac{x}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
Donc, par encadrement : $2xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

On a donc : $\boxed{f(x) \underset{x=+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$

Problème 2 : BECEAS 2020 : Maths 1

1)a) $t \mapsto \frac{sin(t)}{t}$ est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Il faut étudier g en 0.

- Continuité

Au voisinage de $t=0$: $g(t) = \frac{sin(t)}{t} = \frac{t+o(t^2)}{t} = 1 + o(t)$
Donc $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = 1 = g(0)$ et donc g est continue en 0.

- Dérivabilité

Au voisinage de $t=0$: $\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{1+o(t)-1}{t} = o(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc g est dérivable en $t=0$ et $g'(0)=0$

- Caractère C^1

Pour $t \neq 0$ on a, comme g est dérivable : $g'(t) = \frac{cos(t)t - sin(t)}{t^2}$

Au voisiange de $t=0$: $g'(t) = \frac{(1+o(t))t-(t+o(t^2))}{t^2} = \frac{o(t^2)}{t^2} = o(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 = g'(0)$
Donc g' est continue en $t=0$

- Bilan : On a démontrer que : $\boxed{g \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Remarque : pour les 5/2 (pour les 3/2 plus tard), on peut montrer que g est C^∞ assez facilement avec les séries entières.

1)b)i) voir cours

1)b)ii) On effectue dans $\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(jt)}{t}dt$ le changement de variable C^1 bijectif (car $j \neq 0$) $u = jt$.
On obtient que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(jt)}{t}dt$ est de même nature que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(u)}{u}du$ qui est convergente.
Comme il y a convergence on a égalité et donc (en utilisant l'intégrale admise) :

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(jt)}{t}dt \text{ convergente et } \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(jt)}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$$

1)c) Au voisinage de $t=0$:

$$
\begin{aligned}
& ln(g(t)) \\
&= ln(\tfrac{sin(t)}{t}) \\
&= ln(\tfrac{t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}+o(t^5)}{t}) \\
&= ln(1 - \tfrac{t^2}{6} + \tfrac{t^4}{120} + o(t^4)) \\
&= ln(1 - (\tfrac{t^2}{6} - \tfrac{t^4}{120} + o(t^4))) \\
&= -(\tfrac{t^2}{6} - \tfrac{t^4}{120}) - \tfrac{1}{2}\tfrac{t^4}{36} + o(t^4) \\
&= -\tfrac{t^2}{6} - \tfrac{t^4}{180} + o(t^4)
\end{aligned}
$$

On a donc, pour t au voisinage de 0 : $\boxed{ln(g(t)) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4)}$

1)d) $\frac{u^2}{2} = \frac{nt^2}{6} \Rightarrow 3u^2 = nt^2$ On effectue donc, le changement de variable C^1 : $u = \sqrt{\frac{n}{3}}t$

$$\int_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}} exp(-\frac{nt^2}{6})dt = \int_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{3}}} exp(-u^2)\sqrt{\frac{3}{n}}du = \sqrt{\frac{3}{n}} \underbrace{\int_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{3}}} exp(-u^2)du}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

On a donc : $\boxed{\int_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}} exp(-\frac{nt^2}{6})dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}}$

2)a) Soit $n \geq 2$. Alors $t \mapsto \frac{sin^n(t)}{t^n}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{sin^n(t)}{t^n}dt$ pose problème en 0 et $+\infty$.

Au voisinage de 0 : $\frac{sin^n(t)}{t^n} \sim \frac{t^n}{t^n} \underset{t\to 0}{1}$ donc $t \mapsto \frac{sin^n(t)}{t^n}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\int_0^1 \frac{sin^n(t)}{t^n}dt$ est convergente.

Pour $t \geq 1$ alors $0 \leq \left|\frac{sin^n(t)}{t^n}\right| \leq \frac{1}{t^n}$
Comme $n \geq 2$ alors $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par Riemann, et donc, par comparaison $t \mapsto \frac{sin^n(t)}{t^n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $\int_1^{+\infty} \frac{sin^n(t)}{t^n}dt$ est convergente.

$\int_0^1 \frac{sin^n(t)}{t^n}dt$ eet $\int_1^{+\infty} \frac{sin^n(t)}{t^n}dt$ sont convergentes donc $\boxed{\text{pour } n \geq 2,\ \int_0^{+\infty} \frac{sin^n(t)}{t^n}dt \text{ est convergente.}}$

2)b) Soit $a > 0$ et $A > 0$ alors :
On fait une intégration par parties avec $\begin{cases} u = sin^2(t) \\ v' = \frac{1}{t^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} u' = 2sin(t)cos(t) = sin(2t) \\ v = \frac{-1}{t} \end{cases}$. Alors :

$$\int_a^A \frac{sin^2(t)}{t^2}dt = [\frac{-sin^2(t)}{t}]_a^A + \int_a^A \frac{sin(2t)}{t}dt$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{-sin^2(A)}{A} = 0$ et $\frac{-sin^2(a)}{a} \sim \frac{-a^2}{a} = -a \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$, alors on a, comme les intégrales sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin^2(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{sin(2t)}{t}dt$$

On utilise alors, la question 1)b)ii) et on a : $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{sin^2(t)}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}}$

3)a) A k fixé, h_n est C^∞ sur $[0, 2\pi]$, donc $h_n^{(k)}$ est continue sur le segement $[0, 2\pi]$, donc $h_n^{(k)}$ est bornée sur $[0, 2\pi]$ par le théorème des bornes atteintes, et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π périodicité.

Donc : $\boxed{\exists K > 0\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \left|h_n^{(k)}(t)\right| \leq K}$

3)b)i) Au voisinage de $t = 0$: $sin^n(t) \sim t^n$ donc : $\boxed{h_n(t) = sin^n(t) = t^n + o(t^n)}$

3)b)ii) Comme h^n est C^∞, $h^{(k)}$ est C^∞ et admet un DL en 0 à tout ordre. De plus on peut obtenir le DL de $h_n^{(k)}$ en dérivant k fois celui de h_n.
Remarque : on ne peut pas en général dériver un DL, on a utiliser ici que h_n est C^∞

On a donc $h_n^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}(t^n + o(t^n)) = \frac{n!}{(n-k)!}t^{n-k} + o(t^{n-k})$

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{t\to 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}}$

3)c) • $t \mapsto \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 avec le 3)b)ii).
Donc $t \mapsto \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

• On a pour $t > 0$: $\left|\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\right| \leq \frac{K}{t^{n-k}}$
Mais pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ on a : $n-k \geq 2$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^{n-k}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc, par comparaison : $t \mapsto \frac{h_n^{(k)}}{t^{n-k}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

• En regroupant les deux derniers résultat on a $\boxed{\text{la convergence absolue de } \int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}dt}$

3)d) Soit $a > 0$ et $A > 0$. Par intégration par partie avec $\begin{cases} u' = h_n^{(n-1)} \\ v = \frac{1}{t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u = h_n^{(n-2)} \\ v' = \frac{-1}{t^2} \end{cases}$:

$$\int\limits_a^A \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}dt = [\frac{h_n^{(n-2)(t)}}{t}]_a^A + \int\limits_a^A \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}dt$$

Comme $h_n^{(n-2)}$ est bornée (3)a)) alors : $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} = 0$

Avec 3)b)ii) : $\frac{h_n^{(n-2)}(a)}{a} = a \times \underbrace{\frac{h_n^{(n-2)}(a)}{a^2}}_{\xrightarrow[a\to 0]{} \frac{n!}{2}}$ donc $\lim\limits_{a\to 0} \frac{h_n^{(n-2)}(a)}{a} = 0$

Finalement $\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}dt$ et $\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}dt$ sont de même nature, et comme $\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}dt$ est convergente (par 3)c)) alors : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}dt \text{ est convergente}}$

Remarque : on a démontrer de plus que : $\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}dt$

• Si on effectue encore une intégration par partie on a :
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}dt = [\frac{h_n^{(n-3)}(t)}{t^2}]_0^{+\infty} + 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-3)}(t)}{t^3}dt$$

On démontre que le crochet est nul comme ci-dessus et par convergence des intégrales :
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}dt = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-3)}(t)}{t^3}dt$$

Une nouvelle intégration par partie donne : $\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}dt = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-3)}(t)}{t^3}dt = 3\times 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-4)}(t)}{t^4}dt$

On a finalement, par itération : $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}dt = (k-1)!\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-k)}(t)}{t^k}dt$

En particulier, pour $k = n$: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}dt = (n-1)!\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(0)}(t)}{t^n}dt$

On en déduit : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}dt}$

4)a) $h_{2n}(t)$
$= sin^{2n}(t)$ formule D'Euler
$= (\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i})^{2n}$ formule du binôme
$= \frac{1}{(2i)^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(e^{it})^{2n-k}(-e^{-it})^k$
$= \frac{1}{4^n(i^2)^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k(e^{it})^{2n-2k}$
$= \frac{1}{4^n(-1)^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k e^{i(2n-2k)t}$

On a bien : $\boxed{h_{2n}(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k}\binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}}$

4)b) On a que : $\frac{d}{dt}(e^{i(2n-2k)t}) = i(2n-2k)e^{i(2n-2k)t}$, et donc $\frac{d^{2n-1}}{dt^{2n-1}}(e^{i(2n-2k)t}) = (i(2n-2k))^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}$

Avec l'expression de 4)a) et la linéarité de l'intégrale :
$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(i(2n-2k))^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}$
Comme $i^{2n-1} = (i^2)^n\frac{1}{i} = \frac{1}{i}(-1)^n$ et $(2n-2k)^{2n-1} = 2^{2n-1}(n-k)^{2n-1} = \frac{4^n}{2}(n-k)^{2n-1}$ alors :

$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}$

Le terme pour $k = n$ étant nul on a :

$h_{2n}^{(2n-1)}(t)$
$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t} + \frac{1}{2i} \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}$

Changement d'indice $j = n-k$ dans la première somme et $j = k-n$ dans la deuxième :

$h_{2n}^{(2n-1)}(t)$
$= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+n+j}\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}e^{2ijt} + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j+n}\binom{2n}{j+n}(n-(j+n))^{2n-1}e^{i(2n-2(j+n))t}$
$= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j}\binom{2n}{2n-(n-j)}j^{2n-1}e^{2ijt} + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j}\binom{2n}{j+n}(-j)^{2n-1}e^{-2ijt}$
$= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j}\binom{2n}{j+n}j^{2n-1}e^{2ijt} - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j}\binom{2n}{j+n}j^{2n-1}e^{-2ijt}$
$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j}\binom{2n}{j+n}j^{2n-1}\frac{e^{2ijt}-e^{-2ijt}}{2i}$
$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j}\binom{2n}{j+n}j^{2n-1}sin(2jt)$

On a bien : $\boxed{h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j}\binom{2n}{j+n}j^{2n-1}sin(2jt)}$

4)c) Avec 3)d) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_{2n}^{(2n-1)}(t)}{t} dt$$

En utiisant l'expression de 4)b) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} \frac{sin(2jt)}{t} dt$$

Par linéarité de l'intégrale, comme les intégrales sont convergente :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} \int_0^{+\infty} \frac{sin(2jt)}{t} dt$$

En utilisant la question 1)b)ii) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} \frac{\pi}{2}$$

On a donc : $\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1}}$

5)a) $\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{n} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt = \frac{1}{n-1}$

Donc $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{n} dt = O(\frac{1}{n})$ et comme $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors : $\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{n} dt = o(\frac{1}{\sqrt{n}})}$

5)b)i) Sur $]0, \frac{\pi}{2}]$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{sin(t)}{t}\right) = \frac{tcos(t) - sin(t)}{t^2}$

On pose : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $a(t) = tcos(t) - sin(t)$
a est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $a'(t) = cos(t) - tsin(t) - cos(t) = -tsin(t) \leq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
Comme $a(0) = 0$ et que a est décroissante alors $a(t) \leq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
Donc $\frac{d}{dt}\left(\frac{sin(t)}{t}\right) \leq 0$ et $\boxed{t \mapsto \frac{sin(t)}{t} \text{ est décroissante sur } [0, \frac{\pi}{2}]}$

5)b)ii) On a : $\epsilon_n = \frac{ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison ln puissance.
Donc, à partir d'un certain rang, $\epsilon_n \leq \frac{\pi}{2}$ et par la question 5)b)i) :

$$\int_{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{n} dt = \int_{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} (g(t))^n dt \leq \int_{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} (g(\epsilon_n))^n dt = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{ln(n)}{\sqrt{n}}\right)(g(\epsilon_n))^n$$

$ln((g(\epsilon_n))^n) = nln((g(\epsilon_n))$
Avec le 1)c) : $ln((g(\epsilon_n))^n) = n(-\frac{\epsilon_n^2}{6} - \frac{\epsilon_n^4}{180} + o(\epsilon_n^4)) = n(-\frac{\epsilon_n^2}{6} + o(\epsilon_n^2)) = \frac{-(ln(n))^2}{6} + o((ln(n))^2)$

Alors : $\int_{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{n} dt = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{ln(n)}{\sqrt{n}}\right) exp\left(\frac{-(ln(n))^2}{6} + o((ln(n))^2)\right)$

Mais $\sqrt{n} = exp(\frac{1}{2}ln(n))$ donc : $\sqrt{n} \int_{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{n} dt = \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{ln(n)}{\sqrt{n}}\right)}_{O(1)} exp\left(\underbrace{\frac{\frac{ln(n)}{2} - (ln(n))^2}{6} + o((ln(n))^2)}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty}\right)$

Donc $\sqrt{n}\int\limits_{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{\int\limits_{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt = o(\frac{1}{\sqrt{n}})}$

5)c)i) Pour $u \geq 0$, $|e^{-u}-1| = 1-e^{-u}$
Donc, pour u au voisinage de 0^+ :
$|e^{-u}-1|-2u = (1-e^{-u}-2u = (1-(1-u+o(u)))-2u = -u+o(u) \sim -u \leq 0$
Donc au il existe un voisinage de 0 sur lequel $|e^{-u}-1|-2u<0$, donc $\exists a>0$ tel que : $\forall u\in[0,a]$, $|e^{-u}-1|-2u<0$ et donc $\boxed{\exists a>0 \text{ tel que : } \forall u\in[0,a]\ ,\ |e^{-u}-1|\leq 2u}$

5)c)ii) On pose : $\begin{array}{cccc} a & : &]0,\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & ln(\frac{sin(t)}{t})+\frac{t^2}{6}\end{array}$

Avec la question 1)c) on a, pour t au voisinage de 0 : $a(t)=\frac{-t^4}{180}+o(t^4)\sim\frac{-t^4}{180}<0$
Donc $a(t)<0$ au voisinage de 0

De même $a(t)+t^3 = t^3-\frac{t^4}{180}+o(t^4) = t^3+o(t^3)\sim t^3>0$ donc $a(t)+t^3>0$ au voisinage de 0

Donc au voisinage de 0 : $-t^3\leq a(t)\leq 0$

Donc $\boxed{\text{il existe } b>0 \text{ tel que, pour tout } t\in]0,b]\ ,\ -t^3\leq ln(\frac{sin(t)}{t})+\frac{t^2}{6}\leq 0}$

5)c)iii) • $\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc, pour n assez grand $0<\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}<b$ et on a donc pour $t\in]0,\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}[$:
$-t^3\leq ln(\frac{sin(t)}{t})+\frac{t^2}{6}\leq 0$
$\Rightarrow -t^3-\frac{t^2}{6}\leq ln(\frac{sin(t)}{t})\leq -\frac{t^2}{6}$
$\Rightarrow -nt^3-n\frac{t^2}{6}\leq nln(\frac{sin(t)}{t})\leq -n\frac{t^2}{6}$
Par croissance de exp :
$exp(-nt^3-n\frac{t^2}{6})\leq\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n\leq exp(-n\frac{t^2}{6})$
$\Rightarrow exp(-nt^3)exp(-n\frac{t^2}{6})-exp(-n\frac{t^2}{6})\leq\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n-exp(-n\frac{t^2}{6})\leq 0$
$\Rightarrow (exp(-nt^3)-1)exp(-n\frac{t^2}{6})\leq\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n-exp(-n\frac{t^2}{6})\leq 0$
$\Rightarrow \left|\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n-exp(-n\frac{t^2}{6})\right|\leq(1-exp(-nt^3))\underbrace{exp(-n\frac{t^2}{6})}_{\leq 1}$

$\Rightarrow \left|\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n-exp(-n\frac{t^2}{6})\right|\leq(1-exp(-nt^3))$

• $\left|\int\limits_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt-\int\limits_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}e^{-\frac{nt^2}{6}}dt\right|$
$=\left|\int\limits_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}[\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt-e^{-\frac{nt^2}{6}}]dt\right|$
$\leq\int\limits_0^{\frac{ln(n)}{n\sqrt{n}}}\left|\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt-e^{-\frac{nt^2}{6}}\right|dt$ on utilise le point précédent (pour n assez grand)
$\leq\int\limits_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}(1-exp(-nt^3))dt$

On a donc : $\boxed{\text{pour } n \text{ assez grand : } \left|\int\limits_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}\left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt-\int\limits_0^{\frac{ln(n)}{n}}e^{-\frac{nt^2}{6}}dt\right|\leq\int\limits_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}}(1-e^{-nt^3})dt}$

• $t \in]0, \frac{ln(n)}{\sqrt{n}}[\Rightarrow 0 < t \leq \frac{ln(n)}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0 < t^3 \leq \frac{ln^3(n)}{n\sqrt{n}} \Rightarrow 0 < nt^3 \leq \frac{ln^3(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc pour n assez grand : $]0, \frac{ln(n)}{\sqrt{n}}[\subset]0, a[$ et donc avec c)i)

$$\int_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3})dt \leq \int_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}} 2nt^3 dt = [\frac{nt^4}{2}]_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}} = n\frac{(ln(n))^4}{2n^2} = \frac{(ln(n))^4}{2n}$$

Finalement : $\boxed{\text{pour } n \text{ assez grand : } \left| \int_0^{\frac{ln(n)}{n}} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt - \int_0^{\frac{ln(n)}{n}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \frac{(ln(n))^4}{2n}}$

Remarque : mieux que l'énoncé ou erreur de calcul ?

5)c)iv) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt = \int_0^{\frac{ln(n)}{n}} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt + \int_{\frac{ln(n)}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt$

On utilise 5)a) et 5b)ii) et on a : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt = \int_0^{\frac{ln(n)}{n}} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Comme $\frac{\frac{(ln(n))^4}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{(ln(n))^4}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\frac{(ln(n))^4}{2n} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ et donc la question c)iii) donne :

$$\int_0^{\frac{ln(n)}{n}} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt = \int_0^{\frac{ln(n)}{n}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

On se souvient alors de 1)d) : $\int_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}} exp(-\frac{nt^2}{6})dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$ qui donne $\int_0^{\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}} exp(-\frac{nt^2}{6})dt = \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

On obtient finalement : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt = \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

et donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^n dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}}$

II)1)a) Pour qu'il n'y ait qu'une seule montée la seule solution est d'avoir $(1, 2, 3, \dots, n-1, n)$, en effet si la liste n'est pas strictement croissante alors il y a au moins deux montées. On a donc $E_n(1) = 1$
De même la seule liste n'ayant qu'une descente est par symétrie : $(n, n-1, \dots, 3, 2, 1)$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ E_n(1) = E_n(n) = 1}$

II)1)b) La liste $a = (k, k-1, k-2, \dots, 1, k+1, k+2, \dots, n-1, n)$ admet k montées qui sont $((k), (k-1), \dots, (2), (1, k+2, \dots, n))$.

On a donc une liste a pour laquelle $E_n(a) = k$

II)2) Si $a_{i+1} > a_i$ on complète la dernière montée et on rajoute une descente, si $a_{i+1} < a_i$ on complète la dernière descente et on rajoute une montée ; on a donc $s_{i+1} = s_i + 1$, on a une suite arithmétique de raison 1.
Comme $s_1 = 2$ (une montée, une descente), alors : $s_i = 1 + i$
On a donc : $\boxed{\forall a \in S_n\ ,\ M(a) + D(a) = n + 1}$

II)3)a) $n + 1 - a_i = n + 1 - a_j \Rightarrow a_i = a_j$ donc Ψ est bien à valeurs dans S_n.
Clairement Ψ est injective donc, comme S_n est fini, $\boxed{\Psi \text{ est une bijection de } S_n \text{ dans } S_n}$

II)3)b) L'application Ψ transforme les montées en descentes et les descentes en montées. (ce serait pratique en vélo !!!)
On a donc $card(\{a \in S_n\ ,\ M(a) = k\}) = card(\{a \in S_n\ ,\ D(\Psi(a)) = n+1-k\})$
Changement d'indéxation dans le deuxième card : $b = \Psi(a)$, on a donc :
$card(\{a \in S_n\ ,\ M(a) = k\} = card(b \in S_n\ ,\ D(b) = n+1-k\}$

Au bilan on a donc : $\boxed{E_n(k) = E_n(n+1-k)}$

II)4)a) Si $A \cup B = [\![1;n]\!]$ avec $A \cap B = \emptyset$ alors $B = \overline{A}$ (le complémentaire de A dans $[\![1;n]\!]$
Comme on veut A et B non vide, alors il faut $A \neq \emptyset$ et $A \neq [\![1;n]\!]$.
Il s'agit donc de compter le nombre de parties de $[\![1;n]\!]$ différentes de $\emptyset$ et de $[\![1;n]\!]$

Le nombre de décompositions cherchée est donc : $\boxed{2^n - 2}$

II)4)b) Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ admet exactement deux montées alors :
$\exists k \in [\![1;n]\!]\ ,\ a_1 < a_2 < \dots < a_k$ et $a_k > a_{k+1}$ et $a_{k+1} < a_{k+2} < \dots < a_n$

Pour construire une telle liste, il faut choisir deux parties A et B vérifiant la condition du a) avec en plus la condition $a_k > a_{k+1}$
Mais si $a_{k+1} > a_k$ on a alors $a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1} < a_{k+2} < \dots < a_n$ et donc $a = (1, 2, \dots, n)$, il faut donc éliminer les décompostions : $[\![1;n]\!] = [\![1;k]\!] \cup [\![k+1;n]\!]$ (il y en a $n-1$)

On a donc $E_n(2) = (2^n - 2) - (n-1) = 2^n - (n+1)$. Bilan : $\boxed{E_n(2) = 2^n - (n+1)}$

II)5)a) Les éléments a de S_{n+1} tel que $\varphi_n(a) = b = (b_1, \dots, b_n)$ vérifient :
$a \in \{(n+1, b_1, \dots, b_n), (b_1, n+1, b_2, \dots, b_n), \dots, (b_1, \dots, b_i, n+1, b_{i+1}, \dots, b_n), \dots, (b_1, \dots, b_n, n+1)\}$

II)5)b) a est de la forme trouvée au a).
Si $a = (n+1, b_1, \dots, b_n)$ on rajoute une seule montée au début. $M(a) = M(\varphi(a)) + 1$
Si $a = (b_1, \dots, b_n, n+1)$ $n+1$ vient se rajouter à la dernière montée au début. $M(a) = M(\varphi(a))$
Si $a = (b_1, \dots, b_i, n+1, b_{i+1}, \dots, b_n)$ et si $b_i < b_{i+1}$ alors le $n+1$ vient "casser" une montée, et il y en a donc une de plus donc $M(a) = M(\varphi(a)) + 1$
Si $a = (b_1, \dots, b_i, n+1, b_{i+1}, \dots, b_n)$ et si $b_i > b_{i+1}$ alors le $n+1$ vient "compléter" une montée, et il y en a donc le même nombre donc $M(a) = M(\varphi(a))$

Bilan : $\boxed{M(a) \in \{M(\varphi(a)); M(\varphi(a)) + 1\}}$

II)5)c) • Dans une liste $a \in S_{n+1}$, telle que $b = \varphi_n(a)$ admet $k+1$ montées, on peut placer l'élément $n+1$ en fin de chacune des montées de b et seulement là pour préserver le nombre de montées.
On a donc $k+1$ choix pour chacune de ces listes.
• Dans une liste $a \in S_{n+1}$, telle que $b = \varphi_n(a)$ admet k montées, pour augmenter de une montée, il faut placer $n+1$ hors des positions qui laissent invariants le nombre de montées.
Il y a k positions de montées à éviter d'où $n-k$ positions possibles.
Il faut aussi compter l'insertion de $n+1$ en première position ce qui fait donc $n-k+1$ choix possibles pour chacune de ces listes.
• Ainsi, passant au cardinal, on conclut : $\boxed{E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k)}$

On vérifie facilement que la formule est valide pour $k = 0$ et $k > n$

II)5)d) On a, d'après c) (avec $k=2$ et $n=4$) : $E_5(3)=3E_4(3)+3E_4(2)$
On connaît $E_4(2)=2^4-(4+1)=16-5=11$ d'après 4)b), il reste à calculer $E_4(3)$
On a, d'après c) (avec $k=2$ et $n=3$) : $E_4(3)=3E_3(3)+2E_3(2)$
On connaît $E_3(2)=2^3-(3+1)=8-4=4$ d'après 4)b) et $E_3(3)=1$ d'après 1)a)
Donc $E_4(3)=3.1+2.4=11$
Donc $E_5(3)=3.11+3.11=66$

On a donc le tableau :

$n\backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	4	1	0	0
4	1	11	11	1	0
5	1	?	66	?	1

6) Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ la propriété : $HR_n \Leftrightarrow \forall k\in [\![1;n]\!]\ , E_n(k)=\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n+1}{k-j}j^n$

Initialisation : pour $n=1$
Alors forcément $k=1$
Alors $E_n(k) =_1 (1)=1$ d'après 1)a) et $\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n+1}{k-j}j^n=\sum\limits_{j=1}^{1}(-1)^{1-j}\binom{1+1}{1-j}1^n=(-1)^0\binom{2}{0}1=1$ et on a bien HR_0

Hérédité : On suppose HR_n vraie. Alors, avec 5)d) :

Pour $k\in[\![1;n]\!]$.
$E_{n+1}(k+1)=(k+1)E_n(k+1)+(n+1-k)E_n(k)=(k+1)[\sum\limits_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}\binom{n+1}{k+1-j}j^n]+(n+1-k)[\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n+1}{k-j}j^n]$
Dans la deuxième somme le terme est nul pour $j=k+1$ car par convention $\binom{n+1}{k-(k+1)}=0$
On peut donc regrouper les sommes comme suit :
$E_{n+1}(k+1)=\sum\limits_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}[(k+1)\binom{n+1}{k+1-j}-(n+1-k)\binom{n+1}{k-j}]j^n$

On calcule le crochet :
$(k+1)\binom{n+1}{k+1-j}-\binom{n+1}{k-j}$
$=(k+1)\frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n-k+j)!}-(n+1-k)\frac{(n+1)!}{(k-j)!(n+1-k+j)!}$
$=\frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!}[(k+1)(n+1-k+j)-(k+1-j)(n+1-k)]$
$=\frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!}[(k+1)(n+1)-k(k+1)+j(k+1)-(k+1)(n+1)+k(k+1)+j(n+1)-jk]$
$=\frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!}[j(n+2)]$
$=j\frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!}$
$=j\frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+2-(k+1-j))!}$

On retourne dans la somme :
$E_{n+1}(k+1)=\sum\limits_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}[j\frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+2-(k+1-j))!}j^n=\sum\limits_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}\binom{n+2}{k+1-j}j^{n+1}$
Il nous manque la formule pour $k=1$ mais c'est un cas simple.

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\forall k\in[\![1;n]\!]\ , E_n(k)=\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n+1}{k-j}j^n}$

7) On utilise le 6) pour obtenir : $E_{2n-1}(n) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \binom{2n}{n-j} j^{2n-1}$

Comme $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$ et $\binom{2n}{n-j} = \binom{2n}{2n-(n-j)} = \binom{2n}{n+j}$ alors :

On a alors : $E_{2n-1}(n) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$

Avec le I)4)c) on obtient : $\boxed{E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi}(2n-1)! \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{sin(t)}{t}\right)^{2n} dt}$