Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°1

CCP 2013 TSI : exercice 1

1) a) Avec les limites usuelles : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

1) b) f est une fonction polynomiale donc f est dérivable sur $[0,+\infty[$. On a : $\forall x \geq 0$, $f'(x) = \frac{x^2}{4} - 1$

On en déduit le tableau suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{-1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) • f est strictement décroissante et continue sur $[0,2]$ donc $f_{[0,2]}$ définit une bijection de $[0,2]$ dans $[\frac{-1}{3},1]$
Comme $0 \in [\frac{-1}{3},1]$ alors il existe une unique solution sur $[0,2]$, notée β, à l'équation $f(x) = 0$

• f est strictement croissante et continue sur $]2,+\infty[$ donc $f_{]2,+\infty[}$ définit une bijection de $]2,+\infty[$ dans $]\frac{-1}{3},+\infty[$
Comme $0 \in]\frac{-1}{3},+\infty[$ alors il existe une unique solution sur $]2,+\infty[$, notée γ, à l'équation $f(x) = 0$

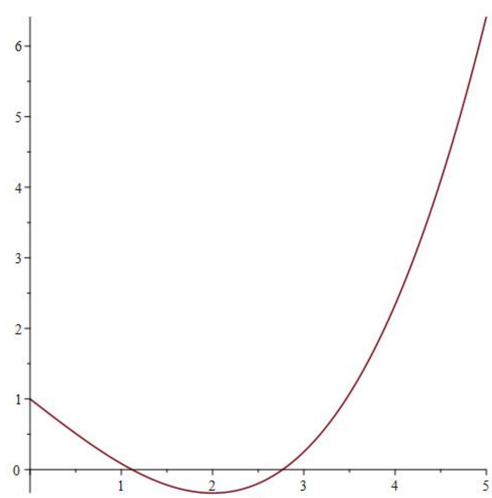
• f s'annule donc exactement deux fois sur $[0,+\infty[$, une fois en $\beta \in [0,2]$ et une fois en $\gamma \in]2,+\infty[$

2) b) $f(\beta) = 0 \Rightarrow \frac{\beta^3}{12} - \beta + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{1 + \frac{\beta^3}{12} = \beta}$

2) c) • A la calculatrice $f(1)f(1,2) < 0$ donc par le TVI : $\beta \in]1;1,2|$
• A la calculatrice $f(2,7)f(2,8) < 0$ donc par le TVI : $\beta \in]2,7;2,8|$

2) d) D'après les variations de f : $\boxed{\begin{cases} f(x) \text{ positif sur } [0,\beta] \cup [\gamma,+\infty[\\ f(x) \text{ négatif sur } [\beta,\gamma] \end{cases}}$

3)



4) a) $u_1 = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \in [0, \beta]$

Initialisation : D'après 2)c), $\beta > 1$ donc $u_0 = 1 \in [0, \beta]$

Hérédité : On suppose que $u_n \in [0, \beta]$

$u_n \in [0, \beta]$
$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \beta$
$\Rightarrow 0 \leq \frac{u_n^3}{12} \leq \frac{\beta}{12}$
$\Rightarrow 1 \leq 1 + \frac{u_n^3}{12} \leq 1 + \frac{\beta}{12}$
$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq \beta$ en utilisant 2)b)
On a donc $u_{n+1} \in [0, \beta]$

Conclusion : On a montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \in [0, \beta]}$

4) b) $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n^3}{12} - u_n = f(u_n)$
Comme $u_n \in [0, \beta]$ et d'après le tableau de variation de f : $f(u_n) \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$
$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

4) c) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par β) donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
Notons λ sa limite. Comme $u_n \in [0, \beta]$ alors $\lambda \leq \beta$
De plus, en passant à la limite dans $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$, on a, comme f est continue : $f(\lambda) = 0$. Comme $\lambda \leq \beta$ alors $\lambda = \beta$

On en déduit : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \beta}$

4) d)

```
def u(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=1+u**3/12
    return u
```

Alès, Douai, Nantes 2009 Pb2

1) $\mathbb{R}^*$ est centré en 0 et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = (-x)sh(\frac{-1}{x}) = xsh(\frac{1}{x}) = f(x)$ car sh est impaire.

Donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

2) a) Au voisinage de $u = 0$: $\boxed{sh(u) \underset{u=0}{\sim} u}$ donc $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} x\frac{1}{x} = 1$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1}$

2) b) Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $u = \frac{1}{x}$ On a alors : $f(x) = \frac{e^u - e^{-u}}{2u}$
Quand $x \to 0^+$, $u \to +\infty$ et $f(x) \sim \frac{e^u}{2u} \to +\infty$ par comparaison exponentielle puissance.
Quand $x \to 0^-$, $u \to -\infty$ et $f(x) \sim \frac{-e^{-u}}{2u} \to +\infty$ par comparaison exponentielle puissance.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
$f'(x) = sh(\frac{1}{x}) + x(\frac{-1}{x^2})ch(\frac{1}{x}) = ch(\frac{1}{x})(\frac{sh(\frac{1}{x})}{ch(\frac{1}{x})} - \frac{1}{x})$

On a bien : $\boxed{f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^* \ , \ f'(x) = [th(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}]ch(\frac{1}{x})}$

4) On a $th' = (\frac{sh}{ch})' = \frac{ch \times ch - sh \times sh}{ch^2} = \frac{1}{ch^2}$
Comme $\forall X \in \mathbb{R}$, $ch(X) \geq 1$ alors $\forall X \in \mathbb{R}$, $th'(X) \in [0, 1]$
th est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème des accroissements finis :
$\forall X \in \mathbb{R}_+^*$, $th(X) - th(0) = (X - 0)th'(c)$ avec $c \in]0, X[$
Comme $X \neq 0$, on a $\frac{th(X)}{X} = th'(c) \in]0, 1]$. (0 exclu car $X \neq 0$)
Comme $X > 0$ alors $th(X) < X$

Bilan : $\boxed{\forall X \in \mathbb{R}_+^* \ , \ th(X) < X}$

5) On va faire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ compte tenu de la parité de f.
Pour $x > 0$, en utilisant 4), on a $[th(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}] < 0$, comme $ch(\frac{1}{x}) > 0$ alors $f'(x) < 0$

On a déjà calculer les limites et on a donc :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

6) Au voisinage de $X = 0$: $\boxed{\frac{sh(X)}{X} \underset{x=0}{=} 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4)}$

7) Au voisinage de $\pm\infty$, : $f(x) = \frac{sh(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ avec $\frac{1}{x} \to 0$, donc avec la question 6) :

$\boxed{\text{Au voisinage de } \pm\infty : f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o(\frac{1}{x^4})}$

8) Posons :
$$\begin{array}{rcl} F & : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \begin{cases} f(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

On va montrer que F est le prolongement par continuité de $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f(\frac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}$ et que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La limite du 2)a) donne : $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{u\to\pm\infty} f(u) = 1 = F(0)$ donc F est continue en 0 et est bien le prolongement prévu.

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ va de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ et que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Il reste à montrer que F est dérivable en 0.

Pour $x \neq 0$: $\frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)-1}{x} = \frac{-x}{2} + o(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

$\boxed{F \text{ est le prolongement par continuité de } x \in \mathbb{R}^* \mapsto f(\frac{1}{x}) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

---

12) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
L'équation homogène associée est : $(E_0) \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{x}y$
$\int \frac{-1}{x}dx = -ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, d'après le cours : $(E_0) \Leftrightarrow y(x) = aexp(-ln(x)) = \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Pour résoudre (E) on utilise la méthode de variation de la constante.
On cherche y sous la forme $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$ puisque $x \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Alors (E)
$\Leftrightarrow xy' + y = ch(x)$
$\Leftrightarrow x(\frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2}) + \frac{\lambda(x)}{x} = ch(x)$
$\Leftrightarrow \lambda'(x) = ch(x)$
$\Leftrightarrow \lambda(x) = sh(x) + a$ avec $a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow y(x) = f(\frac{1}{x}) + \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ s'écrivent } y(x) = F(x) + \frac{a}{x} \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$

13) $\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \text{ s'écrivent } y(x) = F(x) + \frac{b}{x} \text{ avec } b \in \mathbb{R}}$

14) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Alors $y|_{\mathbb{R}_+^*}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = F(x) + \frac{a}{x}$
De même $y|_{\mathbb{R}_-^*}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et donc $\exists b \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = F(x) + \frac{b}{x}$

Comme y est continue en 0 alors $y(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} y(x)$ et on a alors $a = b = 0$ (sinon les limites n'existent pas) et $y(0) = 1$
On a donc bien $y = F$.

Réciproquement. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et les questions 12 et 13 permettent d'affirmer que F est vérifie (E) sur $\mathbb{R}^*$. Comme $F(0) = ch(0) = 1$ alors la relation est aussi vérifiée en $x = 0$.
Donc F est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$)

Bilan : $\boxed{F \text{ est l'unique fonction continue et dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

---

15) D'après le TVI (f est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$) et la stricte décroissance de f, on a $g = f|_{\mathbb{R}_+^*}$ qui définie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1, +\infty[$

Comme $\frac{n+1}{n} > 1$ alors $\boxed{f(x) = \frac{n}{n+1} \text{ admet une unique solution que l'on peut note } u_n.}$

16) $\frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)n-(n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} \leq 0$
donc $\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}$
donc $f(u_{n+1}) < f(u_n)$
et comme f est décroissante alors $u_{n+1} \geq u_n$

Ona bien : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

17) (u_n) est croissante, donc soit (u_n) converge vers un réel μ, soit (u_n) tend vers $+\infty$
Par l'absurde. Si $u_n \to \mu$, alors par continuité de f, $f(u_n) \to f(\mu)$ donc $\frac{n+1}{n} \to f(\mu)$ donc $f(\mu) = 1$, or cette équation n'a pas de solution réelle. Absurde

On a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

18) D'après 7) et 17) : $f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o(\frac{1}{u_n^2})$
De plus $f(u_n) = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

Donc $1 + \frac{1}{6u_n^2} + o(\frac{1}{u_n^2}) = 1 + \frac{1}{n}$
$\Rightarrow \frac{1}{6u_n^2} + o(\frac{1}{u_n^2}) = \frac{1}{n}$
$\Rightarrow \frac{1}{6u_n^2} \sim \frac{1}{n}$
$\Rightarrow 6u_n^2 \sim n$
$\Rightarrow u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}$ car $u_n > 0$

On a donc $\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}}$

---

19) $2ch(x)sh(x) = 2\frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = sh(2x)$
donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ sh(2x) = 2ch(x)sh(x)}$

20) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc considérer Φ une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $[\frac{x}{2}, x] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $J(x)$ est bien définie, comme l'intégrale d'une fonction continue sur un segment et de plus : $J(x) = \Phi(x) - \Phi(\frac{x}{2})$
Φ étant une primitive de f qui est continue, Φ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\Phi' = f$
On en déduit J dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$J'(x)$
$= \Phi'(x) - \frac{1}{2}\Phi'(\frac{x}{2})$
$= f(x) - \frac{1}{2}f(x/2)$
$= xsh(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}\frac{x}{2}sh(\frac{2}{x})$
En utilisant 19) et $sh(\frac{2}{x}) = 2sh(\frac{1}{x})ch(\frac{1}{x})$: $J'(x) = f(x) - \frac{x}{2}sh(\frac{1}{x})ch(\frac{1}{x})$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ J'(x) = f(x)[1 - \frac{1}{2}ch(\frac{1}{x})]}$

21) On a $f(x) > 0$ donc $J'(x)$ est du signe de $1 - \frac{1}{2}ch(\frac{1}{x})$

$J'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}ch(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow ch(\frac{1}{x}) = 2$

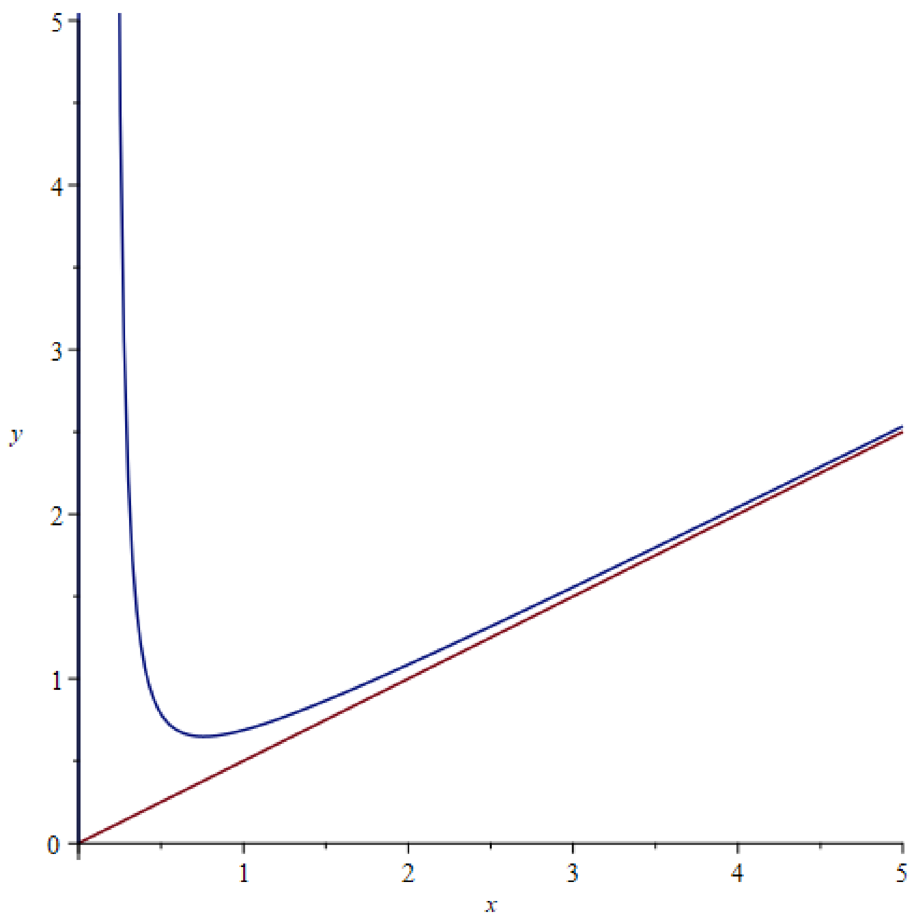
On pose $u = e^{\frac{1}{x}}$, alors : $J'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{u+\frac{1}{u}}{2} = 2 \Leftrightarrow u^2 - 4u + 1 = 0 \Leftrightarrow (u-2)^2 - 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (u-2)^2) = 3 \Leftrightarrow$ $u = 2 + \sqrt{3}$ (autre solution exclue car $u = exp(\frac{1}{x}) \geq 1$)
Donc $\frac{1}{x} = ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow x = \frac{1}{ln(2+\sqrt{3})}$

On a donc $J'(x)$ négatif sur $]0, \frac{1}{ln(2+\sqrt{3})}[$ et positif sur $]\frac{1}{ln(2+\sqrt{3})}, +\infty[$, nulle en $x = \frac{1}{ln(2+\sqrt{3})}$

22)

x	0		$\frac{1}{ln(2+\sqrt{3})}$		$+\infty$
$J(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$J(\frac{1}{ln(2+\sqrt{3})})$	$\nearrow$	$+\infty$

23)



Equations du troisième degré

1°) a) $j^3 = (exp(\frac{2i\pi}{3}))^3 = exp(3\frac{2i\pi}{3}) = exp(2i\pi) = 1$
Par la somme des termes d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$ on a : $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j}$ et comme $j^3 = 1$ alors $1 + j + j^2 = 0$
$j^2 = exp(2\frac{2i\pi}{3}) = exp(\frac{4i\pi}{3}) = exp(\frac{-2i\pi}{3}) = \overline{j}$

On a donc démontré les trois relations voulues : $\begin{cases} j^3 = 1 \\ 1 + j + j^2 = 0 \\ j^2 = \overline{j} \end{cases}$

1°) b) Posons $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \Phi(x) = x^3$ alors Φ est dérivable et $\Phi'(x) = 3x^2 > 0$ sauf en $x = 0$
Φ est alors strictement croissante, continue et comme de plus $\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = +\infty$ alors ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation $\Phi(x) = U \Leftrightarrow x^3 = U$ admet alors une unique solution réelle que l'on peut noter $\sqrt[3]{U}$

1°) c) Dans les conditions données par l'énoncé.
Si $U = 0$, alors $u^3 = U \Leftrightarrow u^3 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow u \in \{U; jU; \overline{j}U\} = \{0\}$
Si $U \neq 0$ alors $u^3 = U \Leftrightarrow u^3 = u_0^3 \Leftrightarrow (\frac{u}{u_0})^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{u}{u_0} \in \{1; j; \overline{j}\} \Leftrightarrow u \in \{u_0; ju_0; \overline{j}u_0\}$

Dans tout les cas : $u^3 = U \Leftrightarrow u \in \{u_0; ju_0; \overline{j}u_0\}$

1°) d) D'après le b) on sait que si $U \in \mathbb{R}$ alors $\sqrt[3]{U}$ est une solution de $u^3 = U$, on applique alors le c) avec $u_0 = \sqrt[3]{u}$ et $u^3 = U \Leftrightarrow u \in \{\sqrt[3]{u}; j\sqrt[3]{u}; \overline{j}\sqrt[3]{u}\}$

2°) a) Considérons l'équation du second degré : $Y^2 - z_0Y - \frac{p}{3} = 0$ qui a 2 solutions complexes u et v.
Alors $(Y - u)(Y - v) = Y^2 - (u + v)Y + uv = Y^2 - z_0Y - \frac{p}{3} = 0$ et par identification on a le résultat voulu.

2°) b) u^3 et v^3 sont solutions de $(X - u^3)(X - v^3) = 0 \Leftrightarrow X^2 - (u^3 + v^3)X + (uv)^3 = 0$
Comme $uv = \frac{-p}{3}$ alors $(uv)^3 = \frac{-p^3}{27}$
z_0 solution de (1) donne :
$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Rightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \Rightarrow u^3 + v^3 = -3uv(u+v) - p(u+v) - q$
Mais $uv = \frac{-p}{3}$ donc
$u^3 + v^3 = p(u + v) - p(u + v) - q$ donc $u^3 + v^3 = -q$

Donc u^3 et v^3 sont solutions de $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$

2°) c) Le discriminant de (2) vaut : $\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27} = \frac{4p^3+27q^2}{27}$

3°) (2) admet deux solutions réelles s'écrivant $U = \frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $V = \frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}$

De plus, on cherche les solutions de (1) sous la forme $u + v$ avec $\begin{cases} u^3 = U \\ v^3 = V \\ uv = \frac{-p}{3} \end{cases}$
Comme U et V sont réelles alors $u \in \{\sqrt[3]{U}; j\sqrt[3]{U}; \overline{j}\sqrt[3]{U}\}$ et $v \in \{\sqrt[3]{V}; j\sqrt[3]{V}; \overline{j}\sqrt[3]{V}\}$
Comme de plus il faut que $uv \in \mathbb{R}$ alors :
$(u, v) \in \{(\sqrt[3]{U}, \sqrt[3]{V}); (j\sqrt[3]{U}, \overline{j}\sqrt[3]{V}); (\overline{j}\sqrt[3]{U}, j\sqrt[3]{V})\}$

Ce qui donne trois solutions à (1) : $z_1 = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V}$, $z_2 = j\sqrt[3]{U} + \overline{j}\sqrt[3]{V}$ et $z_3 = \overline{j}\sqrt[3]{U} + j\sqrt[3]{V}$
On a bien z_1 qui est réelle et, z_2 et z_3 qui sont conjuguées.

4°) a) Si $\Delta < 0$ alors $\Delta = (i\delta)^2$ avec $\delta > 0$ et donc les solutions de (2) s'écrivent :
$U = \frac{-q+i\delta}{2}$ et $V = \frac{-q-i\delta}{2}$ qui sont bien complexes conjuguées et distinctes car $\delta \neq 0$.

4°) b) Si u_0 est une solution particulière de $u^3 = U$ alors comme $V = \overline{U}$, $\overline{u_0}$ est une solution particulière de $v^3 = V$
On a alors $u^3 = U \Leftrightarrow u \in \{u_0; ju_0; \overline{j}u_0\}$ et $v^3 = U \Leftrightarrow u \in \{\overline{u_0}; j\overline{u_0}; \overline{j}\overline{u_0}\}$
Comme de plus il faut que $uv \in \mathbb{R}$ alors :
$(u, v) \in \{(u_0; \overline{u_0}); (ju_0; \overline{ju_0}); (\overline{j}u_0; j\overline{u_0})\}$
Ce qui donne trois solutions à (1) : $z_1 = u_0 + \overline{u_0} = 2\Re(u_0)$, $z_2 = ju_0 + \overline{ju_0} = 2\Re(ju_0)$ et $z_3 = \overline{j}u_0 + j\overline{u_0} = 2\Re(\overline{j}u_0)$
Les trois solutions sont biens réelles et distinctes.

5°) a) Comme $\Delta = 0$ la racine double de (2) est $U = \frac{-q}{2}$

5°) b) Alors $u^3 = \frac{-q}{2} \Leftrightarrow u \in \{\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}; j\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}; \overline{j}\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\}$

Les solutions de (1) s'écrivent $u + v$ avec $u^3 = v^3 = \frac{-q}{2}$ et $uv \in \mathbb{R}$
Donc $(u, v) \in \{(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}, \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}); (j\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}, \overline{j}\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}); (\overline{j}\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}, j\sqrt[3]{\frac{-q}{2}})\}$

Ce qui donne deux solutions réelles pour (1) : $z_1 = 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$; $z_2 = j\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} + \overline{j}\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$ qui est racine double.

6°) Bilan
Pour résoudre (1) $\Leftrightarrow z^3 + pz + q = 0$ on calcule $\Delta = \frac{4p^3+27q^2}{27}$ le discriminant de (2) $\Leftrightarrow X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$

cas 1 : $\Delta > 0$
Alors (1) admet une solution réelle $z_1 = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V}$ et deux solutions complexes conjuguées $z_2 = j\sqrt[3]{U} + \overline{j}\sqrt[3]{V}$ et $z_3 = \overline{z_2}$
avec U et V les solutions réelles de (2)

cas 2 : $\Delta < 0$
Alors (1) admet trois solutions réelles distinctes $z_1 = 2\Re(u_0)$, $z_2 = 2\Re(ju_0)$ et $z_3 = 2\Re(\overline{j}u_0)$
avec u_0 une solution quelconque de $u^3 = U$ avec U une solution de (2)

cas 3 : $\Delta = 0$
Alors (1) admet deux solutions réelles distinctes $z_1 = 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$ $z_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ qui est une racine double.

7°) Effectuons le changement de variable $z = Z + a$ dans (3)
Alors : (3) $\Leftrightarrow (Z+a)^3 + \alpha(Z+a)^2 + \beta(Z+a) + \gamma = 0 \Leftrightarrow Z^3 + (3a+\alpha)Z^2 + (3a^2 + 2a\alpha)Z + (a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma = 0$

Si on pose $a = \frac{-\alpha}{3}$ alors $3a + \alpha = 0$ et (3) $\Leftrightarrow Z^3 + (3a^2 + 2a\alpha)Z + (a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma = 0$

On est bien ramenée à une équation de type (1)

8°) On utilise la méthode avec $p = -12$ et $q = -65$
Alors (2) $\Leftrightarrow X^2 - 65X + 64 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 64$
On a donc $\Delta > 0$ et on se trouve dans le cas (1)
$u^3 = 1$ et $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u = 1$; $v^3 = 64$ et $v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow v = 4$
Les solutions de $z^3 - 12z - 65 = 0$ sont donc $z_1 = 1 + 4 = 5$, $z_2 = j + 4\overline{j} = \frac{-5+3i\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = \overline{z_2} = \frac{-5-3i\sqrt{3}}{2}$

9°) On utilise la méthode avec $p=-12$ $q=-16$
Alors (2) $\Leftrightarrow X^2-16X+64=0 \Leftrightarrow (X-8)^2=0 \Leftrightarrow X=8$
On a donc $\Delta=0$ et on se trouve dans le cas (3) $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}=\sqrt[3]{\frac{-16}{2}}=-\sqrt[3]{8}=-2$
On donc deux solutions 4 et -2 qui est racine double.

10°) Pour résoudre $Eq \Leftrightarrow z^3-9z^2+18z+2\sqrt{2}=0$ on utilise le 7°) et on effectue le changement d'inconnue $z=Z+3$ alors :
$Eq \Leftrightarrow (Z+3)^3-9(Z+3)^2+18(Z+3)+2\sqrt{2}=0$
$\Leftrightarrow Z^3+(3.3-9)Z^2+(3.3^2-9.6+18)Z+3^3-9.9+18.3+2\sqrt{2}=0$
$\Leftrightarrow Z^3-9Z+2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow EQU$

EQU est alors du type (1), on résout alors : (2) $\Leftrightarrow X^2+2\sqrt{2}X-\frac{-9^3}{27}=0 \Leftrightarrow X^2+2\sqrt{2}X+27=0$

On a alors $\Delta=8-108=-100=(10i)^2$
(2) $\Leftrightarrow X=\frac{-2\sqrt{2}+10i}{2}=-\sqrt{2}+5i$ ou $X=-\sqrt{2}+5i$

On cherche des solutions de $u^3=-\sqrt{2}+5i$
Vu la forme de u^3 on va chercher les solutions sous la forme $u=\rho(\sqrt{2}+ai)$ avec $\rho>0$ et $a\in\mathbb{R}$
Alors $u^3=-\sqrt{2}+5i \Leftrightarrow \rho^3(\sqrt{2}(2-3a^2)+(6a-a^3)i)=-\sqrt{2}+5i$
En identifiant partie réelle et partie imaginaire on a : $\begin{cases}\rho^3(2-3a^2)=-\sqrt{2}\\ \rho^3(6a-a^3)=5\end{cases}$
On peut diviser car $\rho\neq 0$ on obtient : $\frac{2-3a^2}{6a-a^3}=\frac{-1}{5} \Leftrightarrow a^3+15a^2-6a-10=0$
On remarque que $a=1$ est une solution évidente de l'équation ci-dessus et si on reporte dans $\rho^3(6a-a^3)=5$ on obtient $\rho=1$
On vérifie alors (en calculant) que $\sqrt{2}+i$ est une solution de $u^3=-\sqrt{2}+5i$

En appliquant la méthode du 7°) les solutions de EQ sont alors :
$Z_1=2\Re(u_0)=2\sqrt{2}$, $Z_2=2\Re(ju_0)=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $Z_3=2\Re(\bar{j}u_0)=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

En appliquant le changement de variable $z=Z+3$ les solutions de $z^3-9z^2+18+2\sqrt{2}=0$ sont alors : $z_1=3+2\sqrt{2}$, $z_2=3-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $z_3=3-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

11°) f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution réelle.

12°) f est dérivable et $f'(x)=3x^2+p$
On a alors deux cas :

cas 1 : $p\geq 0$
Alors $f'(x)>0$ (sauf éventuellement en 0) et donc f est strictement croissante.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

cas 2 : $p < 0$

Alors $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

avec $\alpha = f(-\sqrt{\frac{-p}{3}})$ et $\beta = f(\sqrt{\frac{-p}{3}})$

Revenons au cas 1 : $p \geq 0$ alors $\delta = 4p^3 + 27q^2 \geq 0$ et $f(x) = 0$ admet une unique solution.
On peut remarque que si $p > 0$ alors f est strictement croissante donc la racine est simple.
Si $p = 0$ alors $f(x) = x^3 + q$ et la racine est simple sauf si $q = 0$

Dans le cas 2 il faut étudier le signe de $\alpha\beta$

$\alpha = f(-\sqrt{\frac{-p}{3}}) = (-\sqrt{\frac{-p}{3}})^3 - p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q = \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + q$
$\beta = f(\sqrt{\frac{-p}{3}}) = (\sqrt{\frac{-p}{3}})^3 + p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q = -\frac{p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + q$

$\alpha\beta = q^2 - (\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}})^2 = q^2 - \frac{-4p^3}{27} = \frac{\delta}{27}$

Alors : $\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow (\alpha > 0$ et $\beta > 0)$ ou $(\alpha < 0$ et $\beta < 0)$
Donc si $\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \delta > 0$ alors $f(x) = 0$ admet une unique solution.

D'autre part : $\alpha\beta < 0 \Leftrightarrow (\alpha < 0$ et $\beta > 0)$ ou $(\alpha > 0$ et $\beta < 0) \Leftrightarrow \alpha > 0$ ou $\beta < 0$ (puisque $\alpha \geq \beta$)
Donc si $\alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \delta < 0$ alors $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes.

Enfin, si $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\beta = 0$
alors $f(x) = 0$ admet une racine simple et une racine double

Bilan :

$\delta < 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ admet trois solutions réelles distinctes.
$\delta > 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ admet une unique solution réelle simple.
$\delta = 0$ et $(p, q) \neq (0, 0) \Leftrightarrow f(x) = 0$ admet une racine réelle simple et une racine réelle double.
$(p, q) = (0, 0) \Leftrightarrow f(x) = 0$ admet 0 pour une unique racine réelle triple.