Pour le jeudi 10 octobre 2024

Devoir à la maison n°3 de Mathématiques

Code couleur :	noir	plutôt facile ou important, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (ou complément)
	rouge	assez difficile (ou si on a fait le reste)
	vert	difficile (ou si on a le temps)

On soignera particulièrement la rédaction sur les parties en noires.
Pour les autres parties, à condition de le signaler on pourra rédiger un peu plus rapidement (en particulier sur les parties rouges et vertes).

EXERCICE 1 : Intégrale de Gauss

1°) Montrer que l'intégrale $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

2°) a) Montrer que : $\forall x \in]-1; +\infty[\ ,\ ln(1+x) \leq x$
2°) b) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall t \in [0, \sqrt{n}]\ ,\ (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq exp(-t^2)$
2°) c) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall t \in [0, \sqrt{n}]\ ,\ exp(-t^2) \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$ et $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} exp(-t^2) dt$

On définit également la suite d'intégrales généralisées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$

3°) a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la convergence des intégrales v_n.
3°) b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ u_n \leq I_n$
3°) c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ I_n \leq v_n$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x) dx$
On admet le résultat (voir TD Wallis) : $w_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

4°) a) A l'aide du changement de variable : $t = \sqrt{n} sin(x)$ exprimer u_n en fonction de w_{2n+1}.
4°) b) A l'aide du changement de variable : $t = \sqrt{n} tan(x)$ montrer que $v_n = \sqrt{n} w_{2n-2}$ pour $n \geq 1$

5°) Calculer G.

6°) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ H_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$
En utilisant les résultats du TD sur les intégrales de Wallis, donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

EXERCICE 2

Calculer pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et sous forme factorisée le déterminant suivant :

$$A = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 3

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 3. Soit $u \in L(E)$ tel que : $\begin{cases} u \neq 0_{L(E)} \\ u^2 = 0_{L(E)} \end{cases}$

1°) Montrer que : $rg(u) \in \{1;2\}$

2°) Montrer que : $Im(u) \subset Ker(u)$

3°) Déterminer $rg(u)$

4°) Montrer qu'il existe une base B de E telle la matrice de u relativement à B de u est donnée par :
$M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE n°4 : Erreur d'interpolation de Lagrange

Soit $n \geq 1$, un entier naturel et $[a,b]$ un segment de longueur non nulle de $\mathbb{R}$.
Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in [a,b]$ tel que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ et soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a;b]$.

On note P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange, de degré inférieur ou égale à n, vérifiant :

$$\forall i \in [\![0;n]\!] \ , \ P_n(x_i) = f(x_i)$$

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat, noté (AL), suivant :
$(AL) \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \ , \ \exists \xi \in [a,b] \ , \ f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

1°) Traiter le cas ou il existe $i \in [\![0;n]\!]$ tel que $x = x_i$

2°) Dans ce 2°), on traite le cas ou $x \notin \{x_i \ , \ i \in [\![0;n]\!]\}$

On peut alors poser $A = \frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$ et $\forall t \in [a,b] \ , \ g(t) = f(t) - P_n(t) - A \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$

2°) a) Montrer que g s'annule en $n+1$ points de $[a,b]$.

2°) b) Démontrer le résultat (AL) dans le cas particulier du 2°).

3°) Démontrer le résultat (AL) dans tout les cas.

4°) a) Justifier l'existence de $M = \sup_{t \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$.

4°) b) Montrer que : $\forall x \in [a,b] \ , \ |f(x) - P_n(x)| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

4°) Ecrire un programme ou une fonction Python, permettant de tracer une fonction f et son polynôme interpolateur de Lagrange en n points ...