**Lundi 7 octobre 2024**

# PSI* 2024-2025, Devoir surveillé de Mathématiques n°2

*La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*
*Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.*

**LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE**

---

## Question de cours, Exercices proches du cours

1°) Donner le développement limité en $x=0$, à l'ordre 2 de : $x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1+e^x}$

2°) Montrer que : $G = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

3°) Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose : $F = \{f \in E \ , \ f'(0) = 0\}$.
Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $E$

4°) Donner la définition d'une symétrie d'un espace vectoriel $E$ et celle d'un projecteur d'un espace vectoriel $E$.

5°) Donner la définition et la valeur du déterminant de Vandermonde.

---

## Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$, on note $B$ la base canonique de $E$. Soit $F = \mathbb{R}^2$, on note $C$ la base canonique de $F$.

On pose : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ f(x,y,z) = (x+2y+z, -x+y+2z)$

1°) Montrer que $f \in L(E,F)$ et déterminer la matrice $A$ de $f$ relativement à $B$ et $C$.

2°) a) Déterminer $ker(f)$ sous forme de $Vect$.
2°) b) Déterminer le rang de $f$ et l'image de $f$.

On pose $B' = ((1,-1,1),(0,1,-1),(0,0,1))$ et $C' = ((1,-1),(1,1))$

3°)a) Montrer que $C'$ est une base de $F$.
3°)b) Montrer que $B'$ est une base de $E$.
3°)c) Déterminer la matrice de $f$ relativement à $B'$ et $C'$.

# Exercice 2

On considère pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}.$$

1°) *Etude des* $f_n$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) Donner une équation cartésienne de $D_n$ la tangente à la représentation graphique de $f_n$ au point d'abscisse 0.

2°) *Etude d'une suite d'intégrales impropres.*

On pose pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 : $I_n = \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$

(Il est démontré dans le (a) que chacune de ces intégrales est convergente).

a) Montrer que pour tout réel $t$ strictement positif , $f_n(t) \leqslant \dfrac{1}{t^n}$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} f_n(t)dt$, puis de l'intégrale $I_n$

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} f_n(t)dt = 0$

c) Montrer que pour tout réel $t$ positif , $0 \leqslant e^{-t} - f_n(t) \leqslant t^n$

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(t)dt = 1 - \dfrac{1}{e}$

e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3°) *Etude d'une fonction définie par des limites.*

a) Pour tout réel $t$ positif , déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$. (On distinguera $t < 1$ , $t = 1$ , $t > 1$)

b) Dès lors, on définit sur $\mathbb{R}^+$une fonction $h$ par $h(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$.

Donner la courbe représentative de $h$ dans un repère orthonormé. (On donne $e^{-1} \cong 0,37$)

$h$ est-elle contine sur $\mathbb{R}^+$ ?

c) Etudier l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} h(t)dt$. A-t-on ici $\int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$ ?

4°) *Un autre cas.*

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :
$$\begin{array}{cccc} g_n & : & [0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} \frac{nt^{n-1}}{1+t^{2n}} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{array}$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $J_n = \int\limits_0^{+\infty} g_n(t)dt$

a) Montrer que $J_n$ est convergente.

b) Calculer $J_n$ en effectuant le changement de variable $u = t^n$

c) Pour tout réel $t$ positif , déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t)$.

d) Dès lors , on définit sur $\mathbb{R}^+$une fonction $H$ par $H(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t)$. $H$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$ ?

e) Etudier l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} H(t)dt$ A-t-on ici $\int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} g_n(t)dt$ ?

# PROBLEME

Dans ce problème $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim(E) \geq 2$ et $f$ est un endomorphisme de $E$.

On convient que $f^0 = Id_E$ et que pour tout entier $k \geq 1$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

## Partie A

Le but de cette partie est de prouver qu'il existe un entier naturel $p$ tel que :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ E = Ker(f^p) \oplus Im(f^p) \end{cases}$$

1°) Dans ce 1°) uniquement, on suppose que $f$ est bijectif. Donner alors une valeur de $p$ vérifiant (1).

2°) *Exemple 1*

Dans cette question $n = 3$ et on munit $E$ d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère que $f$ est l'endomorphisme dont la matrice dans $B$ est $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

2°) a) Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$. Le choix $p = 1$ convient-il ?

2°) b) Déterminer une base de $Ker(f^2)$ et une base de $Im(f^2)$.

2°) c) Justifier l'égalité $E = Ker(f^2) \oplus Im(f^2)$. Le choix $p = 2$ convient-il ?

3°) *Exemple 2*

Dans cette question $n = 4$, l'espace vectoriel $E$ est muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

$m$ est un paramètre réel et la matrice de $f$ dans $B$ est $A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3°) a) Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$. Le choix $p = 1$ convient-il ?
(on discutera bien sûr selon la valeur de $m$).

3°) b) Déterminer le plus petit entier $p$ vérifiant (1).

4°) *Étude du cas général*

Dans cette question on suppose que $f$ n'est pas bijectif.

4°) a) Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$ et $Im(f^{k+1}) \subset Im(f^k)$.

4°) b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $a_k = dim\Big(Ker(f^k)\Big)$.

Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On pose $I = \{k \in \mathbb{N}\ ,\ a_k = a_{k+1}\}$

4°) c) Montrer que $I$ est non vide et que $0 \notin I$

4°) d) En déduire l'existence d'un entier $p$, supérieur ou égal à 1, qui vérifie les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0; p-1]\!]\ ,\ Ker(f^k) \neq Ker(f^{k+1}) \\ Ker(f^p) = Ker(f^{p+1}) \end{cases}$$

4°) e) Montrer que pour tout entier $k$ supérieur ou égal à $p$ on a $Ker(f^k) = Ker(f^p)$.
4°) f) Déduire de ce qui précède l'égalité $E = Ker(f^p) \oplus Im(f^p)$

*Dans toute la suite du problème p désigne le plus petit entier vérifiant (1) et on admet que c'est celui qui a été obtenu à la question 4 de la partie A.*

# Partie B

*Dans cette partie on étudie deux cas particuliers.*
5°) a) On suppose $p = n$. Montrer que $f^n$ est l'endomorphisme nul. Quelle est la dimension de $Ker(f)$ ?

5°) b) *Un exemple*

Dans cette question $n = 3$, $E$ est muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $f$ est l'endomorphisme dont la matrice dans $B$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Trouver une base $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $E$ telle que $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = 0_E \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 \end{cases}$

Écrire la matrice de $f$ dans cette base $B'$ et vérifier que $p = 3$.

6°) On suppose ici que $p$ est supérieur ou égal à 2 et que de plus $Ker(f^p) = E$.

6°) a) Montrer que pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, le sous-espace $Ker(f^k)$ admet dans $Ker(f^{k+1})$ un sous-espace supplémentaire qui n'est pas réduit à $\Big\{0_E\Big\}$.

6°) b) En déduire l'existence d'une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux nuls).

6°) c) On reprend l'exemple de la question 3 de la partie A, avec $m = 0$.

Déterminer, par permutation des vecteurs $e_1$, $e_2$, $e_3$ et $e_4$ une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à $A_0$ dans la base $B$ est triangulaire stricte.