Question de cours, Exercices proches du cours

1°) Voir DS n°1

2°) Voir exercice corrigé

3°) On pose : $\begin{array}{cccc} \Phi & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & f'(0) \end{array}$ qui est bien définie, car f est C^1 et qui est une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
On a alors $F = ker(\Phi)$ et donc $\boxed{F \text{ est un sous espace vectoriel de } E.}$

4°) Voir cours

Exercice 1

1°) Si on note en colonne : $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ -x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$

Cette écriture permet de voir que : $\boxed{f \in L(E,F) \text{ et que } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

2°) a) $A \begin{pmatrix} x+2y+z \\ -x+y+2z \end{pmatrix} = 0_F \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=z \end{cases}$ (on a fait $L_1 + L_2$)

On en déduit : $\boxed{Ker(f) = vect((1,-1,1))}$

2°) b) D'après le a), $dim(Ker(f)) = 1$ et par le théorème du rang :
$dim(Ker(f)) + rg(f) = dim(E) \Rightarrow 1 + rg(f) = 3 \Rightarrow rg(f) = 2$
Comme $Im(f) \subset F$ et $dim(F) = dim(Im(f)) = 2$ alors $Im(f) = F$.

Bilan : $\boxed{rg(f) = 2 \text{ et } Im(f) = F}$

3°) a) On peut calculer le déterminant de C' relativement à la base canonique C de F.
On a : $det_C(C') = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc $\boxed{C' \text{ est une base de } F.}$

3°) b) De même $det_B(B') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $\boxed{B' \text{ est une base de } E.}$

3°) c) $f(1,-1,1) = (0,0)$, $f(0,1,-1) = (1,-1)$ et $f(0,0,1) = (1,2) = \frac{-1}{2}(1,-1) + \frac{3}{2}(1,1)$.
On en déduit : $\boxed{M_{B',C'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$

Exercice 2 : (adapté de E.S.C. 2004)

1)a) $1+t^n$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$ donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et
$\forall t \geq 0\ ,\ f_n(t) = \frac{-e^{-t}(1+t^n)-nt^{n-1}e^{-t}}{(1+t^n)^2} = \frac{-e^{-t}(t^n+nt^{n-1}+1)}{(1+t^n)^2} \leq 0$, la fonction f_n est donc décroissante.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $f_n(0) = 1$

D'ou le tableau suivant :

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$1 \searrow$	0

1)b) Comme $f(0)=1$ et $f'(0)=-1$ alors $\boxed{D_n \text{ a pour équation } y = 1-x}$

2)a) Pour $t \geq 0$ on a : $0 \leq e^{-t} \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{1+t^n} \leq \frac{1}{t^n}$ donc $0 \leq \frac{e^t}{1+t^n} \leq \frac{1}{t^n}$
On a bien : $\boxed{\forall t > 0\ ,\ f_n(t) \leq \frac{1}{t^n}}$

On a l'inégalité ci-dessus et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt$ est une intégrale de Riemann convergente car $n \geq 2 > 1$, donc par comparaison (avec des fonctions positives) on a $\int\limits_1^{+\infty} f_n(t)dt$ qui est convergente.
Comme f_n est continue sur $[0,1]$ alors $\int\limits_0^1 f_n(t)dt$ est convergente.
Donc $\int\limits_1^{+\infty} f_n(t)dt$ et $\int\limits_0^1 f_n(t)dt$ sont convergentes et donc $\boxed{I_n \text{ est convergente.}}$

2)b) Pour $t \geq 1\ ,\ 0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{t^n}$ donc en intégrant entre $t=1$ et $A>1$:
$0 \leq \int\limits_0^A f_n(t)dt \leq \int\limits_0^A \frac{1}{t^n}dt = [\frac{1}{(-n+1)t^{n-1}}]_1^A = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)A^{n-1}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n-1}$

On en déduit par passage à la limite que : $0 \leq \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt \leq \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc, par encadrements : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt = 0}$

2)c) $e^{-t} - f_n(t) = e^{-t} - \frac{e^{-t}}{1+t^n} = e^{-t}\frac{t^n}{1+t^n}$ donc $e^{-t} - f_n(t) \geq 0$
et $e^{-t} - f_n(t) \leq e^{-t}\frac{t^n}{1} = e^{-t}t^n \leq t^n$ car $e^{-t} \leq 1$

On a bien : $\boxed{\forall t \geq 0\ ,\ 0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq t^n}$

2)d) Si on intègre entre 0 et 1 l'inégalité ci-dessus on a : $0 \leq \int\limits_0^1 e^{-t}dt - \int\limits_0^1 f_n(t)dt \leq \int\limits_0^1 t^n dt$
Donc $0 \leq (1-\frac{1}{e}) - \int\limits_0^1 f_n(t)dt \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(t)dt = 1-\frac{1}{e}$

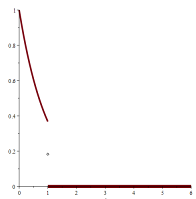
Comme $\int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int\limits_0^1 f_n(t)dt + \int\limits_1^{+\infty} f_n(t)dt$, avec la limite précédente et celle du b) on a :
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt = 1-\frac{1}{e}}$

3)a) • Si $0 \leq t < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}$

• Si $t = 1$ alors $f_n(t) = \frac{e^{-1}}{1+1} = \frac{1}{2e}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{2e}$

• Si $t > 1$ alors $f_n(t) \sim \frac{e^{-t}}{t^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2e} \text{ si } t = 1 \\ 0 \text{ si } t > 1 \end{cases}}$



3)b)

h n'est clairement pas continue en $t = 1$, donc $\boxed{h \text{ n'est pas continue sur } \mathbb{R}^+.}$

3)c) $\int\limits_0^{+\infty} h(t)dt = \int\limits_0^1 h(t)dt = \int\limits_0^1 e^{-t}dt = 1 - \frac{1}{e}$

On a donc bien : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt}$

4°)a) g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. J_n ne pose problème que en $+\infty$

Au voisinage de $+\infty$: $h_n(t) \sim \frac{nt^{n-1}}{t^{2n}} = \frac{n}{t^{n+1}}$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1 \geq 2 > 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^{n+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, et donc, par équivalent $t \mapsto g_n(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Comme, il n'y a pas de problème sur $[0, 1]$, g_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\boxed{J_n \text{ est convergente.}}$

4°)b) On effectue dans J_n le changement de variable C^1 bijectif $u = t^n$. $du = nt^{n-1}$.

Comme J_n est convergente on a : $J_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = [Arctan(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ J_n = \frac{\pi}{2}}$

4°)c) • Si $0 \leq t < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = 0$

• Si $t = 1$ alors $g_n(t) = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = 1$

• Si $t > 1$ alors $g_n(t) \sim \frac{n}{t^{n+1}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = 0$

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ 1 \text{ si } t = 1 \\ 0 \text{ si } t > 1 \end{cases}}$

d) A cause de sa valeur en 1 : $\boxed{H \text{ n'est pas continue sur } \mathbb{R}^+}$

e) Vu la définition de H : $\int\limits_0^{+\infty} H(t)dt = 0$ et comme $0 \neq \frac{\pi}{2}$ avec le 4°)b) on a :

$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t)dt \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} g_n(t)dt}$

PROBLEME

1°) Comme f est bijectif alors : $\begin{cases} f \text{ injectif } \Rightarrow ker(f) = \{0_E\} \\ \text{f surjectif } \Rightarrow Im(f) = E \end{cases}$.

Comme $E = \{0_E\} \oplus E$, alors $\boxed{\text{si } f \text{ est bijectif la valeur } p = 1 \text{ vérifie (1)}}$

2°) a) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \\ -4x + y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 6z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases}$

On a alors $ker(A) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$

Comme A est la matrice de f, en passant par les coordonnées : $\boxed{ker(f) = Vect(e_1 - e_2 - e_3)}$

Par le théorème du rang, $dim(Im(A)) = dim(Im(f)) = 2$, les 2 premières colonnes de A forment clairement une famille libre, donc, en revenant à f : $\boxed{Im(f) = Vect(4e_1 - 2e_2 - 4e_3, -e_1 - e_2 + e_3)}$

Calculons le déterminant de C, la famille obtenue en concaténant la base de $ker(f)$ et celle de $Im(f)$, relativement à B.

Alors $det_B(C) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$. On remarque que $L_1 = -L_3$ donc $det_B(C) = 0$.

La somme $ker(f) + Im(f)$ n'est donc pas directe, car sinon C serait une base adaptée à cette somme directe, or C n'est pas une base (sinon $det_B(C) \neq 0$)

$\boxed{\text{Le choix } p = 1 \text{ ne convient pas.}}$

2°) b) On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

On remarque que $C_1 = -C_2$ et $C_3 = -2C_2$, donc $\frac{1}{2}C_2$ est une base de $Im(A)$.

En revenant à f on en déduit : $Im(f^2) = Vect(e_1 + e_2 - e_3)$

On a aussi $C_1 + C_2 = (0)$ et $2C_2 + C_3 = (0)$ donc $ker(f^2) = Vect(e_1 + e_2, 2e_2 + e_3)$.

On a donc : $\boxed{(e_1 + e_2, 2e_2 + e_3) \text{ est une base de } ker(f^2) \text{ et } (e_1 + e_2 - e_3) \text{ est une base de } Im(f^2)}$

2°) c) Comme au 2°) a) on calcule le déterminant de la concaténation des bases de $ker(f^2)$ et $Im(f^2)$ relativement à B.

Ce déterminant vaut : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ donc, ceci prouve que $\boxed{E = ker(f^2) \oplus Im(f^2)}$

$\boxed{\text{Le choix } p = 2 \text{ convient.}}$

3°) a) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ my = 0 \\ x - mz - t = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = mz + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On en déduit $ker(f) = Vect(me_1 + e_3, e_1 + e_4)$, comme on a deux vecteurs formant une famille libre, on a : $\boxed{(me_1 + e_3, e_1 + e_4) \text{ qui est une base de } ker(f)}$

Par le théorème du rang : $dim(Im(f)) = 4 - dim(ker(f)) = 4 - 2 = 2$, de plus les deux première colonnes de A ne sont clairement pas liées, donc $\boxed{(e_3, -e_1 + me_2 + e_4) \text{ qui est une base de } Im(f)}$

Comme au 2°) on calcule le déterminant relativement à la base canonique de la concaténation des bases de $Ker(f)$ et $Im(f)$:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

$\boxed{\text{Le choix } p = 1 \text{ convient pour } m \neq 0 \text{ mais ne convient pas pour } m = 0}$

3°) b) Cas 1 : $m \neq 0$
Le 3°)a) permet de conclure que $p = 1$.

Cas 2 : $m = 0$
Il faut voir si $p = 2$ convient puisque $p = 1$ ne convient pas.

Alors $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit $Im(f^2) = Vect(e_3)$ et $ker(f) = Vect(e_1, e_3, e_4)$.
On a alors : $ker(f^2) \cap Im(f^2) = Vect(e_3) \neq \{0_E\}$.
La somme $ker(f^2) + Im(f^2)$ n'est pas directe et donc $p = 2$ ne convient pas.

Essayons $p = 3$.
Comme $A_0^3 = (0)$ alors $ker(f^3) = E$ et $Im(f^3) = \{0_E\}$ et on a bien $E = ker(f^3) \oplus Im(f^3)$

$\boxed{\text{Le plus petit entier } p \text{ vérifiant (1) est donc } p = 3 \text{ pour } m = 0 \text{ et } p = 1 \text{ pour } m \neq 0.}$

4°) a) Soit $x \in E$.
$x \in ker(f^k) \Rightarrow f^k(x) = 0_E \Rightarrow f^{k+1}(x) = f(0_E) = 0_E \Rightarrow x \in ker(f^{k+1})$ ($f(0_E) = 0_E$ car $f \in L(E)$)
$x \in Im(f^{k+1}) \Rightarrow \exists y \in E \ , \ x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z \in E \ , \ x = f^k(z)$ en posant $z = f(y)$

Donc $x \in Im(f^{k+1}) \Rightarrow x \in Im(f^k)$

On a donc bien : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \ , \ Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1}) \text{ et } Im(f^{k+1}) \subset Im(f^k)}$

4°) b) $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1}) \Rightarrow dim(Ker(f^k)) \leq dim(Ker(f^{k+1})) \Rightarrow a_k \leq a_{k+1}$

$\boxed{\text{La suite } (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est bien croissante.}}$

4°) c) $a_0 = dim(ker(f^0)) = dim(ker(Id_E)) = dim(\{0_E\}) = 0$, $a_1 = dim(ker(f)) \geq 1$ puisque $ker(f) \neq \{0_E\}$ vu que f n'est pas bijectif.
On a donc $a_0 = 0 < a_1$, donc $a_0 \neq a_1$ et donc $0 \notin I$.
Comme $ker(f^k) \subset E$ alors $a_k \leq n$ et donc la suite (a_k) est majorée, comme elle est de plus croissante, alors elle converge, et comme elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors elle constante à partir d'un certaint et rang et donc $a_{k+1} = a_k$ à partir d'une certaint rang. On a bien $I \neq \emptyset$

$\boxed{\text{On a } I \text{ non vide et } 0 \notin I}$

4°) d) I est une partie non vide de $\mathbb{N}$ minorée par 1, on peut donc poser $p = Min(I)$ (en fait I est de la forme $[\![p; +\infty[\![$) et on a bien $p \geq 1$ puisque $0 \notin I$.

Comme $p \in I$ alors $a_{p+1} = a_p$ donc $dim(ker(f^p)) = dim(ker(f^{p+1}))$ et comme $ker(f^p) \subset ker(f^{p+1})$ on a $ker(f^p) = ker(f^{p+1})$
Si $k \in [\![0; p-1]\!]$, alors par définition de p : $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow dim(ker(f^k)) < dim(ker(f^{k+1}))$ et donc, comme on a l'inclusion du 4°) a) $ker(f^k) \neq ker(f^{k+1})$

$$\boxed{\text{On a donc } \exists p \geq 1 \text{ tel que } \begin{cases} \forall k \in [\![0; p-1]\!] \ , \ Ker(f^k) \neq Ker(f^{k+1}) \\ Ker(f^p) = Ker(f^{p+1}) \end{cases}}$$

4°) e) Soit $k \geq p$. On a avec le a) : $ker(f^p) \subset ker(f^{p+1}) \subset \cdots \subset ker(f^k)$ donc $ker(f^p) \subset ker(f^k)$
De plus $dim(ker(f^p)) = a_p = a_k = dim(ker(f^k))$ puisque la suite (a_k) est constante à partir du rang p.
On a alors $\begin{cases} ker(f^p) \subset ker(f^k) \\ dim(ker(f^p)) = dim(ker(f^k)) \end{cases}$ et donc $ker(f^p) = ker(f^k)$

On a bien : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \ , \ k \geq p \Rightarrow ker(f^p) = ker(f^k)}$

4°) f) Soit $x \in E$
$x \in ker(f^p) \cap Im(f^p) \Rightarrow f^p(x) = 0_E$ et $\exists y \in E \ , \ x = f^p(y)$
Alors $f^p(x) = 0_E \Rightarrow f^p(f^p(y)) = 0_E \Rightarrow f^{2p}(y) = 0_E \Rightarrow y \in ker(f^{2p})$
Mais, avec le e), on a : $ker(f^{2p}) = ker(f^p)$ et donc $y \in ker(f^p)$, soit $f^p(y) = x = 0_E$
On en déduit $ker(f^p) \cap Im(f^p) = \{0_E\}$, la somme $ker(f^p) + Im(f^p)$ est donc directe.
Alors $dim(ker(f^p) + Im(f^p)) = dim(ker(f^p) \oplus Im(f^p)) = dim(ker(f^p)) + dim(Im(f^p)) = dim(E) = n$ par le théorème du rang.
Comme $ker(f^p) + Im(f^p) \subset E$ alors $ker(f^p) + Im(f^p) = E$. On en déduit : $\boxed{E = ker(f^p) \oplus Im(f^p)}$

5°) a) Par définition de p, on a : $a_0 < a_1 < \cdots < a_k < \cdots < a_{p-1} < a_p$, la suite est strictement croissante jusqu'à a_p et donc $a_k = k$ pour $k \leq p$.
Dans le cas de ce 5°)a), comme $p = n$ on en déduit $a_n = n$ et donc $ker(f^n) = E$ et donc $f = 0_{L(E)}$
On a de plus forcément $a_k = k$ pour $k \leq n$ et donc $a_1 = 1$ et $dim(ker(f)) = 1$

$$\boxed{\text{Si } p = n, \ f^n \text{ est l'endomorphisme nul et } dim(ker(f)) = 1}$$

5°) b) $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$
Alors $ker(f) = vect(\varepsilon_1)$ avec $\varepsilon = e_1 + e_2 + e_3$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ -y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \\ -z - 1 - 2z + 2 + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

En posant $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$ (choix de $z = 0$) alors $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z \\ -z - 1 - 2z + 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z \end{cases}$$

En posant $\varepsilon_3 = e_1$ (choix de $z = 0$) alors $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$

Posons $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

$det_B(B') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ et donc B' est une base.

$$\boxed{\text{En posant } \begin{cases} \varepsilon = e_1 + e_2 + e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_2 \\ \varepsilon_3 = e_1 \end{cases} \text{ alors } B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base et } \begin{cases} f(\varepsilon_1) = 0_E \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 \end{cases}}$$

Les relations ci-dessus donnent directement $\boxed{M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

On a alors $e_1 \in Im(f) \cap ker(f)$ donc $ker(f) \cap Im(f) \neq \{0_E\}$ et donc $p \neq 1$

On calcule $M_{B'}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $Im(f^2) = vect(e_1)$ et $ker(f^2) = vect(e_1, e_2)$. Comme $ker(f^2) \cap Im(f^2) = vect(e_1) \neq \{0_E\}$ alors $p \neq 2$

On calcule $M_{B'}(f^3) = (0)$ et donc il est directe que $Im(f^3) = \{0_E\}$ et $ker(f^3) = E$, on a $\boxed{p = 3}$.

6°) a) Pour $k \in [\![0; p-1]\!]$ on a :
$ker(f^k) \subset ker(f^{k+1})$ et $dim(ker(f^k)) = a_k < a_{k+1} = dim(ker(f^{k+1}))$ (par définition de p).

On peut compléter une base $(h_1, \dots, h_{a_k})$ de $ker(f^k)$ en $(h_1, \dots, h_{a_k}, \dots, h_{a_{k+1}})$ une base de $ker(f^{k+1})$.
$F_k = Vect(h_{a_k+1}, \dots, h_{a_{k+1}})$ est alors un supplémentaire de dimension $a_{k+1} - a_k > 0$ de $ker(f^k)$ dans $ker(f^{k+1})$.

$\boxed{\text{Pour } k \in [\![0; p-1]\!], \text{ le sous-espace } ker(f^k) \text{ admet donc}}$
$\boxed{\text{dans } ker(f^{k+1}) \text{ un supplémentaire qui n'est pas réduit à } \{0_E\}}$

6°) b) A partir du a) on construit :
$ker(f^2) = ker(f) \oplus F_1$
$ker(f^3) = ker(f^2) \oplus F_2 = ker(f) \oplus F_2 \oplus F_1$
$ker(f^4) = ker(f^3) \oplus F_3 = ker(f) \oplus F_3 \oplus F_2 \oplus F_1$
Puis par itération, comme on a supposé $ker(f^p) = E$:
$E = ker(f^p) = ker(f) \oplus F_p \oplus F_{p-1} \dots \oplus F_3 \oplus F_2 \oplus F_1$

On construit $B'' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base adaptée à cette somme directe.

Si $e'_i \in ker(f)$ on a $f(e'_i) = 0_E$,

Si $e'_i \in F_k$ avec $1 \leq k \leq p$ alors $f(e'_i) \in F_{k+1}$ et si $e'_i \in F_p$ alors $f(e'_i) \in ker(f)$

La matrice de f dans la base B'' est donc de la forme (par blocs de 0 et de termes éventuellement non nuls) : $\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{On a donc l'existence d'une base dans laquelle la matrice de } f \text{ est triangulaire stricte.}}$

6°) c) On rappelle que $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_4 \\ f(\varepsilon_3) = 0_E \\ f(\varepsilon_4) = -\varepsilon_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\varepsilon_3) = 0_E \\ f(\varepsilon_4) = -\varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_1) = \varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_4 \end{cases}$

Si on prend la base $B_a = (\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ alors la matrice de f relativement à B_a est donc $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$