

Chapitre 5 : Exemples d'exercices corrigés

Énoncé, Exercice 5.1

Soit le \mathbb{R} espace vectoriel $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_2[X]$

a) Quelle est la dimension de E ?

b) Dans E , calculer $(3, X^2 + X + 1) + 2(-2, X^2 - X + 1)$

On pose $\forall (a, P) \in E$, $\varphi((a, P)) = a$

c) Montrer que φ est une forme linéaire, et montrer que $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E isomorphe à $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction

a) D'après le cours $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}) + \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 1 + 3 = 4$ donc $\dim(E) = 4$

b) $(3, X^2 + X + 1) + 2(-2, X^2 - X + 1) = (3 + 2(-2), (X^2 + X + 1) + 2(X^2 - X + 1)) = (-1, 3X^2 - 3X + 3)$

c) $\forall (a, P), (b, Q) \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\varphi((a, P) + \lambda(b, Q)) = \varphi((a + \lambda b), (P + \lambda Q)) = a + \lambda b = \varphi((a, P)) + \lambda \varphi((b, Q))$

et donc φ est linéaire, comme l'espace d'arrivée est \mathbb{R} , φ est une forme linéaire.

$\ker(\varphi)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc $\ker(\varphi)$ est un hyperplan.

On a : $(a, P) \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow a = 0$ donc $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \ker(\varphi) \\ P & \mapsto & (0, P) \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

$\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E isomorphe à $\mathbb{R}_2[X]$

Énoncé, Exercice 5.2

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in E, P(1) = P(-1)\}$ et $G = \text{Vect}(X)$

Montrer que $F \oplus G = E$

Correction

Étudions F : Soit $P = a + bX + cX^2 \in F$, alors $P(1) = P(-1) \Leftrightarrow a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow b = 0$

Si $b = 0$ alors $P = a + cX^2$ Donc $F = \text{Vect}(1, X^2)$

Soit $P \in F \cap G$. Alors $P \in G \Rightarrow P = aX$ avec $a \in \mathbb{R}$

Mais $P \in F \Rightarrow P(1) = P(-1) \Rightarrow a = -a \Rightarrow a = 0$ et donc $P = 0_E$

Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$, comme l'autre inclusion est évidente : $F \cap G = \{0_E\}$ et donc $F + G = F \oplus G$

De plus, si $P = a + bX + cX^2 \in E$ alors : $P = (a + cX^2) + (bX)$ avec $a + cX^2 \in F$ et $bX \in G$ donc $P \in F + G$. Ceci pour tout $P \in E$ donc $E \subset F + G$ et comme l'autre inclusion est évidente : $E = F + G$

On a donc $\begin{cases} F + G = F \oplus G \\ E = F + G \end{cases}$ et donc $F + G = F \oplus G$

Enoncé, Exerice 5.3

Soit E un K espace vectoriel et E_1, E_2, \dots, E_p des sous-espaces vectoriels de E .
Montrer que $F = E_1 + E_2 + \dots + E_p$ est le plus petit sous espace vectoriel (au sens de l'inclusion) de E contenant tout les E_i .

Correction

- On a $F = E_1 + E_2 + \dots + E_p = \left\{ \sum_{i=1}^p x_i \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket x_i \in E_i \right\}$

Donc $\forall x_i \in E_i$, $x_i = 0_E + \dots + 0_E + x_i + 0_E + \dots + 0_E$ avec $x_i \in E_i$ et $0_E \in E_j$ pour $j \neq i$.

On donc bien $E_i \subset F$.

On a donc F contient qui bien tout les E_i

• Réciproquement, soit G un sous espace vectoriel de E contenant tout les E_i , montrons alors que $F \subset G$.

Soit $x \in F$. On écrit $x = \sum_{i=1}^p x_i$ avec $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $x_i \in E_i$

Mais chaque x_i est dans G puisque $E_i \subset G$.

Comme G est un sous espace vectoriel, alors, par combinaison linéaire $x \in G$.

On a bien $F \subset G$.

- Bilan : $F = E_1 + E_2 + \dots + E_p$ est le plus sous-espace vectoriel contenant chaque E_i .
-

Enoncé, Exerice 5.4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R}^2)$. Montrer que A admet un polynôme annulateur non nul de degré au plus n^2 .

Correction

La famille $(A^k)_{k \in \llbracket 0; n^2 \rrbracket}$ est une famille de $n^2 + 1$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension $n^2 < n^2 + 1$.

Cette famille est donc liée, donc $\exists (a_0, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

$P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est donc un polynôme annulateur de A , non nul et de degré $\leq n^2$.

Énoncé, Exercice 5.5

Soit φ l'endomorphisme de $E = M_n(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in E \quad \varphi(M) = 2M - M^T$
Calculer $\det(\varphi)$ et $\text{tr}(\varphi)$

Correction

φ est clairement un endomorphisme. On sait que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, avec $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

De plus $M \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(M) = 2M - M = M$ et $M \in A_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(M) = 2M + M = 3M$.

Dans une base adaptée à la somme directe $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ on a donc φ qui a pour matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 3I_{n^2-p} \end{pmatrix} \text{ avec } p = \dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{En passant par cette matrice : } \begin{cases} \text{tr}(f) = p + 3(n^2 - p) = 3n^2 - 2p = 3n^2 - n(n+1) = 2n^2 - n = n(2n-1) \\ \det(f) = 1 \times 3^{n^2-p} = 3^{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}} = 3^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \boxed{\text{tr}(f) = n(2n-1) \text{ et } \det(f) = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Énoncé, Exercice 5.6

Soit E un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $u \in L(E)$ tel que $\text{rg}(u) = 1$
Montrer que $u^2 = \text{tr}(u)u$

Correction

$$\text{rg}(u) = 1 \Rightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 1 \Rightarrow \exists e_1 \in E, \text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1)$$

On complète alors la famille libre (e_1) en $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E par le théorème de la base incomplète.

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, u(e_i) = a_i e_1 \text{ puisque } u(e_i) \in \text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1)$$

$$\text{La matrice de } u \text{ relativement à } B \text{ s'écrit : } M_B(u) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Celle de } u^2 \text{ d'écrit } M_B(u^2) = (M_B(u))^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\text{tr}(u) = \text{tr}(M_B(u)) = a_1$ et donc $M_B(u^2) = \text{tr}(u)M_B(u)$, en revenant aux endomorphismes : $\boxed{u^2 = \text{tr}(u)u}$