Feuille d'exercices n°17 : Chapitre 6

Exercice 152. *a) Montrer que* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *est convergente.*
Quel est le signe de S *?*
b) Déterminer N *(le plus petit possible) pour que* $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *soit une valeur approchée de* S *à* 10^{-2} *près.*
c) Calculer $\int_0^1 x^k dx$ *et utiliser ce calcul pour calculer* S

Exercice 153. *($\star$)*
Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (\frac{n!}{n^n})^{\frac{1}{n}}$

Exercice 154. *Etudier suivant* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *la convergence de la série de terme générale :*
$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$

Exercice 155. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs.*
Montrer que : $\sum u_n$ *est convergente* $\Rightarrow \sum u_n^2$ *est convergente*

Exercice 156. *Soit* $({}_un)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par*$u_0 > 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$
a) Déterminer la nature de $\sum u_n$
b) Déterminer la nature de $\sum(u_n - \frac{1}{n})$

Exercice 157. *($\star$)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante tel que* $\sum u_n$ *soit convergente.*
Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$

Exercice 158. *($\star$)*
Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 159. *($\star$)*

A) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites vérifiant :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$
Montrer que : $\sum v_n$ *convergente* $\Rightarrow \sum u_n$ *convergente et que* $\sum u_n$ *divergente* $\Rightarrow \sum v_n$ *divergente.*

B) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$
Montrer que : $a < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *convergente et que* $a > 1 \Rightarrow \sum u_n$ *divergente*
Montrer que l'on ne peut pas conclure dans le cas $a = 1$.