Feuille d'exercices n°16 : Chapitre 6

Exercice 144. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - ln(n)$
a) Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ *au voisinage de* $+\infty$
b) Montrer que la suite (u_n) *est convergente.*
c) En déduire l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :* $ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \gamma + o(1)$
d) En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
e) Etudier la nature de $\sum \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n^2}$ *et* $\sum \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}$

Exercice 145. *Etudier :* $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+2k}{k^2-1}$

Exercice 146. *A) Etudier la convergence de la série* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

B) On pose $\forall n \geq 2 \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ *et* $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
a) Montrer que $v_n \sim u_n$*. Peut-on en déduire la convergence de* $\sum v_n$ *?*
b) La série $\sum v_n$ *est-elle absolument convergente ?*
On pose $w_n = v_n - u_n$
c) Donner un équivalent en $+\infty$ *de* w_n
d) Quelle est la nature de $\sum w_n$ *?*
e) Déterminer la nature de $\sum v_n$
f) Méditer sur la règle de l'équivalent.

Exercice 147. *a) Déterminer suivant* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la nature de* $\sum u_n$ *avec* $u_n = \frac{n+n^\alpha}{n^{\alpha-2}}$
b) Déterminer suivant $(a,b) \in]0;+\infty[^2$ *la nature de* $\sum u_n$ *avec* $u_n = \frac{1}{a^n+b^n}$
c) (⋆ - Série de Bertrand) Déterminer suivant $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *la nature de* $\sum \frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta}$

Exercice 148. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = sin(\pi\sqrt{1+n^2})$
a) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
b) Déterminer la nature de $\sum u_n$ *en effectuant un développement asymptotique de* u_n *suffisamment précis.*

Exercice 149. *Calculer* $\alpha = 6,31313131313131313131313131313131....$

Exercice 150. *Soit* $x \in]-1;1[$.
Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ *en utilisant un produit de Cauchy avec* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Exercice 151. *Etudier la convergence de* $\sum \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$