Feuille d'exercices n°15 : Chapitre 6

Exercice 134. *a) Montrer que* $\forall x \in]0,\pi[$ *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $u_n = \sum_{k=0}^{n} cos(kx)$ *est bornée.*
b) Montrer que $\forall x \in]0,\pi[$, $\sum_{k=0}^{n} cos(kx) = \frac{cos(\frac{nx}{2})sin(\frac{(n+1)x}{2})}{sin(\frac{x}{2})}$

Exercice 135. *Calculer, pour* $n \in \mathbb{N}^*$ $A_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$, $B_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ *et* $C_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j|$

Exercice 136. *Calculer, pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} kx^k$

Exercice 137. *Calculer, pour* $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$

Exercice 138. *On pose :* $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{2}{n^3+6n^2+11n+6}$
a) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$
b) La série $\sum u_n$ *est-elle convergente ? Si oui, calculer sa somme.*

Exercice 139. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) - sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ *Etudier la convergence de* $\sum u_n$

Exercice 140. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *fixé. On pose* $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ *et* $R_n = cos(x) - S_n$
a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $cos^{(k)}(x) = cos(x + k\frac{\pi}{2})$
b) Calculer $cos^{(2k)}(0)$ *et* $cos^{(2k+1)}(0)$
c) A l'aide de la formule de Taylor, donner une expression intégrale de R_n.
d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = cos(x)$

Exercice 141. *On pose :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = exp(sin(ln(1+n^2))\frac{1}{n^2+n}$
Etudier la nature de $\sum u_n$ *en utilisant la règle de comparaison.*

Exercice 142. *On pose :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+2}$
Etudier la nature de $\sum u_n$ *en utilisant la règle de l'équivalent.*

Exercice 143. *Etudier la nature de* $\sum u_n$ *dans les cas suivants :*
a) $u_n = \frac{nln(n)+n^2}{\sqrt{n^5+n^4+sin^2(n)n^2+1}}$ *b)* $u_n = cos(n)$
c) $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ *d)* $u_n = sin(n)exp(-n^2)$
e) $u_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n^2+2n+1}$ *f)* $u_n = exp(-n+ln(n))$
g) $u_n = \frac{(-1)^n}{2^n+n^2+3n+4}$ *h)* $u_n = sin(n)tan(\frac{1}{n^2})$
i) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ *j)* $u_n = e^{-n}arctan(7n+3)$
k) $u_n = \frac{1}{n(ln(n))^2}$ *l)* $(\star)$ $u_n = \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$