Feuille d'exercices n°14 : Chapitre 5

Exercice 127. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant :*
$f \circ f - 2f - 3Id_E = 0_{L(E)}$
On pose $A = ker(f + Id_E)$ et $B = ker(f - 3Id_E)$.
a) Montrer que A et B sont stables par f
b) Montrer que : $E = A \oplus B$
c) Si E est de dimension 3. Quelles sont les valeurs possibles pour $det(f)$?

Exercice 128. *Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3.*
On suppose que $f \neq 0_{L(E)}$ et que $f \circ f = O_{L(E)}$.
a) Déterminer une inclusion entre $Im(f)$ et $ker(f)$
b) Déterminer le rang de f.
c) Montrer qu'il existe une base B de E telle que $M_B(f)$, la matrice relativement à B de f , ait 8 coefficients nuls.

Exercice 129. *Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $M_n(\mathbb{R})$ avec $A \in M_p(\mathbb{R})$, $D \in M_q(\mathbb{R})$.*
a) Quel est le format de D ?
b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A, B, D pour que M soit inversible.

Exercice 130. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$*
Montrer que : $ker(f) = ker(f \circ f) \Leftrightarrow Im(f) = Im(f \circ f)$

Exercice 131. *Soit E un K espace vectoriel et $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p sous-espace vectoriel de E.*
Montrer que : $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant $E_1, E_2, \ldots, E_p$.

Exercice 132. *($\star$)*
Soit E un K espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant $u^{n-1} \neq 0_{L(E)}$ et $u^n = 0_{L(E)}$.
a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que :$(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
b) Calculer $det(u)$ et $tr(u)$.
c) Montrer que $v = Id_E + u$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 133. *($\star$)*
Soit E un K espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$
Montrer que : $dim(ker(u)) \leq dim(ker(u^2)) \leq 2dim(ker(u))$