Feuille d'exercices n°13 : Chapitre 5

Exercice 121. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* f *l'application définie sur* $E = M_2(\mathbb{R})$ *par*
$\forall M \in M_2(\mathbb{R}) \quad f(M) = AM$
a) Montrer que f *est un endomorphisme de* E.
b) Déterminer une base de $ker(f)$
c) f *est-il surjectif ?*
d) Déterminer une base de $Im(f)$.
e) A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = ker(f) \oplus Im(f)$ *?*

Exercice 122. *Déterminer suivant a le rang de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a-1 & 2a+1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

Exercice 123. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$
Déterminer suivant a le rang de A

Exercice 124. *Soit la matrice* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Soit* $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \setminus \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\}$
a) Montrer que F *est un espace vectoriel et que* $(1, J, J^2)$ *est une base de* F
b) On pose $c(J) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \ \setminus \ MJ = JM\}$. *Déterminer* $c(J)$

Exercice 125. *Soit* $E = M_n(\mathbb{R})$ *et* $F = ker(tr)$ *(tr est la forme linéaire trace).*
On pose $\forall M \in E \quad \phi(M) = tr(M) I_n + M$
a) Quelle est la dimension de F *?*
b) Montrer que ϕ *est un endomorphisme de* E.
c) Déterminer $ker(\phi)$
d) Soit $M \in F$, *calculer* $\phi(M)$
e) Montrer que : $E = F \bigoplus Vect(I_n)$
f) Montrer que ϕ *admet pour matrice une matrice diagonale dans une certaine base.*
En déduire le rang et la trace de ϕ.

Exercice 126. *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *et* f *l'endomorphisme de* E *admettant* $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ *comme matrice relativement à la base canonique de* E
a) Montrer que f *est une symétrie de* E
b) Déterminer les caractéristiques de f *(c'est-à-dire* $ker(f - Id)$ *et* $ker(f + Id)$*)*