Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°3

EXERCICE 1 : Intégrale de Gauss

1°) $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc G ne pose problème qu'en $+\infty$.
Or, par comparaison exp-puissance on a $e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^6})$ au voisinage de $+\infty$.
Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^6} dt$ est convergente, alors par négligeabilité $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc $\boxed{G \text{ est convergente}}$

2°) a) Posons $\forall x \in]-1; +\infty[\ ,\ a(x) = x - ln(1+x)$,
alors a est C^∞ sur $]-1; +\infty[$ et $\forall x \in]-1; +\infty[\ ,\ a'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

On a donc :

x	-1		0		$+\infty$
$a'(x)$		-	0	+	
$a(x)$		↘	0	↗	

et on en déduit $\forall x \in]-1; +\infty[\ ,\ a(x) \geq 0$

On a donc $\boxed{\forall x \in]-1; +\infty[\ ,\ ln(1+x) \leq x}$

2°) b) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall t \in [0, \sqrt{n}]\ ,\ x = \frac{-t^2}{n} \geq -1$ et on peut donc appliquer le 2°) a). On obtient :
$ln(1 + \frac{-t^2}{n}) \leq \frac{-t^2}{n} \Rightarrow nln(1 - \frac{t^2}{n}) \leq -t^2 \Rightarrow (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq exp(-t^2)$ par croissance de exp

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall t \in [0, \sqrt{n}]\ ,\ (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq exp(-t^2)}$

2°) c) On applique encore le a) avec $x = \frac{t^2}{n} > -1$. On obtient :
$ln(1 + \frac{t^2}{n}) \leq \frac{t^2}{n} \Rightarrow nln(1 + \frac{t^2}{n}) \leq t^2 \Rightarrow (1 + \frac{t^2}{n})^n \leq exp(t^2) \Rightarrow exp(-t^2) \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall t \in [0, \sqrt{n}]\ ,\ exp(-t^2) \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}}$

3°) a) $t \mapsto (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc v_n pose problème en $+\infty$
Mais $(1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \sim (\frac{t^2}{n})^{-n} \sim \frac{n^n}{t^{2n}} > 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente puisque $2n > 1$
donc, par équivalent, $\boxed{v_n \text{ est bien convergente.}}$

3°) b) En intégrant entre 0 et $\sqrt{n}$ l'inégalité du 2°) b) on obtient directement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ u_n \leq I_n}$

3°) c) On obient $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$ en intégrant entre 0 et $\sqrt{n}$ l'inégalité du 2°) c)
Comme $0 \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ alors : $\int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$ et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ I_n \leq v_n}$

4°) a) On effectue dans $u_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$ le changement de variable C^1 bijectif :
$t = \sqrt{n} sin(x) \Leftrightarrow x = arcsin(\frac{t}{\sqrt{n}})$ (on a bien $\frac{t}{\sqrt{n}} \in [0; 1]$). On a : $dt = \sqrt{n} cos(x) dx$.
$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sin^2(x))^n (\sqrt{n} cos(x) dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2(x))^n (\sqrt{n} cos(x) dx) = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}(x) dx = \sqrt{n} w_{2n+1}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ u_n = \sqrt{n} w_{2n+1}}$

4°) b) On effectue dans $v_n = \int\limits_0^{+\infty} (1+\frac{t^2}{n})^{-n}dt$ le changement de variable C^1 bijectif,

$t = \sqrt{n}tan(x) \Leftrightarrow x = arctan(\frac{t}{\sqrt{n}})$. On a : $dt = \frac{\sqrt{n}}{cos^2(x)}dx$.

$v_n = \int\limits_0^{+\infty} (1+tan^2(x))^{-n}(\frac{\sqrt{n}}{cos^2(x)}dx) = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{1}{cos^2(x)})^{-n}\frac{\sqrt{n}}{cos^2(x)}dx = \sqrt{n}\int\limits_0^{+\infty} cos^{2n-2}dx = \sqrt{n}w_{2n-2}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ v_n = \sqrt{n}w_{2n-2}}$

5°) On regroupe les résultats de 3°)c) , 4°)a) et 4°)b) et on obtient : $\sqrt{n}w_{2n+1} \leq I_n \leq \sqrt{n}w_{2n-2}$

Mais $\sqrt{n}w_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sqrt{n}w_{2n-2} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4}} \longrightarrow \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Par encadrement, on en déduit $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Or, comme G est convergente, on a $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G$

On en déduit donc : $\boxed{G = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

6°) • Pour $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^{2n}e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, il n'y a problème qu'en $+\infty$ pour H_n.
Mais, au voisinage de $+\infty$: $t^{2n}e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^4})$, donc comme $t \mapsto \frac{1}{t^4}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors, par négligeabilité, $t \mapsto t^{2n}e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et finalement H_n est bien convergente.

• On effectue dans H_n une intégration par partie, licite car $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}e^{-t^2} = 0$

On a : $H_n = [\frac{t^{2n+1}}{2n+1}e^{-t^2}]_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}(-2te^{-t^2})dt = \frac{2}{2n+1}\int\limits_0^{+\infty} t^{2n+2}e^{-t^2}dt$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = \frac{2n+1}{2}H_n$

• Donc $H_n = \frac{2n-1}{2}H_{n-1} = \frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}H_{n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)...3\times1}{2^n}H_0$

Mais $H_0 = G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $(2n-1)(2n-3)(2n-5)...3\times1 = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)...4\times3\times2\times1}{(2n)(2n-2)...4\times2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Donc $H_n = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2\times4^n n!}$

Mais d'après le TD sur Wallis : $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = w_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$

donc $H_n = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2\times4^n n!} \sim \frac{n!}{2\sqrt{n}}$

On a donc : $\boxed{H_n \underset{n=+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\sqrt{n}}}$

EXERCICE 2

$$A = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \qquad \text{On effectue } C_1 \longleftarrow C_1 - C_2 - C_3$$

$$A = \begin{vmatrix} -2c & b+c & c+a \\ -2c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ -2c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} c & b+c & c+a \\ c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \qquad \text{On effectue } \begin{cases} C_2 \longleftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 \end{cases}$$

$$A = -2\begin{vmatrix} c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ c^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} = -2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \text{ (on a factorisé } C_1 \text{ par } c, C_2 \text{ par } b \text{ et } C_3 \text{ par } a)$$

On reconnaît alors un déterminant de Vandermonde et on a donc $\boxed{A = -2abc(b-c)(a-c)(a-b)}$

EXERCICE 3

1°) $u \neq 0_{L(E)}$ donc $Im(u) \neq \{0_E\}$ donc $dim(Im(u)) \geq 1$ et donc $rg(u) \geq 1$
$u^2 = 0_{L(E)} \Rightarrow det(u^2) = 0 \Rightarrow det(u)^2 = 0 \Rightarrow det(u) = 0$ donc $u \notin GL(E)$
Donc $rg(u) < 3$ ou encore $rg(u) \leq 2$

On a donc bien $\boxed{rg(u) \in \{1; 2\}}$

2°) Soit $y \in Im(u)$.
Alors $\exists x \in E\ ,\ y = u(x)$, en composant par u : $u(y) = u^2(x) = 0_E$ car $u^2 = 0_{L(E)}$ et donc $y \in ker(u)$

On a donc : $\forall y \in Im(u)\ ,\ y \in Ker(u)$ et donc $\boxed{Im(u) \subset Ker(u)}$

3°) D'après le théorème du rang : $dim(Ker(u)) + rg(u) = dim(E) = 3$.
Mais, d'après 2°) : $rg(u) \leq dim(Ker(u))$, qui donne : $2rg(u) \leq dim(Ker(u)) + rg(u) = 3$ donc $rg(u) \leq \frac{3}{2}$.
Comme avec le 1°) $rg(u) \in \{1, 2\}$ alors on en déduit : $\boxed{rg(u) = 1}$

4°) $rg(u) = 1$, on peut donc considérer (e_1) une base de $Im(u)$.
$Im(u) \subset Ker(u)$ et $Ker(u)$ est de dimension 2 par le théorème du rang, donc, on peut compléter (e_1) en (e_1, e_2) une base de $Ker(u)$.
On complète maintenant (e_1, e_2) en $B' = (e_1, e_2, e'_3)$ une base de E.
$e_1 \in Ker(u)$ donc $u(e_1) = 0_E$, de même $e_2 \in Ker(u)$ donc $u(e_2) = 0_E$
$u(e'_3) \in Im(u) = Vect(e_1)$ donc $\exists a \in \mathbb{C}\ ,\ u(e'_3) = ae_1$. On a $a \neq 0$ car sinon $u = 0_{L(E)}$
On pose alors $e_3 = \frac{e'_3}{a}$ et on a $u(e_3) = \frac{1}{a}u(e'_3) = e_1$

Comme $B = (e_1, e_2, e_3)$ reste une base on a alors bien : $\boxed{M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

EXERCICE n°4 : Erreur d'interpolation de Lagrange

1°) Si il existe i tel que $x = x_i$ alors : $f(x) - P_n(x) = f(x_i) - P_n(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$ par définition de P_n.
D'autre part, $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = 0$ puisqu'il y a un terme non nul, on a alors :
$\forall \xi \in [a, b]\ ,\ f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ puisque $0 = 0$.

$\boxed{\text{Le cas ou il existe } i \text{ tel que } x = x_i \text{ est donc traité de manière directe.}}$

2°) a) Pour $j \in [\![0; n]\!]\ ,\ g(x_j) = f(x_j) - P_n(x_j) - A\prod_{i=0}^{n}(x_j - x_i) = f(x_j) - f(x_j) - 0 = 0$ par définition de P_n. $\boxed{g \text{ s'annule donc aux } n+1 \text{ points distincts } (x_j)_{0 \leq j \leq n}}$

2°) b) On va multiroller la fonction g.
• On sait que $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ et que $g(x_j) = 0$ pour tout $j \in [\![0;n]\!]$
On sait aussi que $g(x) = f(x) - P_n(x) - A\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = f(x) - P_n(x) - (f(x) - P_n(x)) = 0$
On a donc $n+2$ zéros distincts de g sur $[a,b]$ (x vient s'intercaler entre les x_i).
On classe ces zéros sous la forme $x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_n < x'_{n+1}$

•Alors, $\forall j \in [\![0;n]\!]$: g est continue sur $[x'_j; x'_{j+1}]$, dérivable sur $]x'_j; x'_{j+1}[$, $g(x'_j) = g(x'_{j+1}) = 0$, et donc par le théorème de Rolle on a : $\exists x_{1,j} \in]x_j; x_{j+1}[\ ,\ g'(x_{1,j}) = 0$

• Si $n = 1$ on s'arrête, sinon on a : $x_{1,0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,n}$ telle que $g'(x_{1,j}) = 0$ pour $j \in [\![0;n]\!]$
Alors, $\forall j \in [\![0;n-1]\!]$: g' est continue sur $[x_{1,j}; x_{1,j+1}]$, dérivable sur $]x_{1,j}; x_{1,j+1}[$, $g'(x_{1,j}) = g'(x_{1,j+1}) = 0$, et donc par le théorème de Rolle on a : $\exists x_{2,j} \in]x_{1,j}; x_{1,j+1}[\ g''(x_{2,j}) = 0$

•Si $n = 2$ on s'arrête, sinon on a : $x_{2,0} < x_{2,1} < \cdots < x_{2,n-1}$ telle que $g'(x_{2,j}) = 0$ pour $j \in [\![0;n-1]\!]$
Alors, $\forall j \in [\![0;n-]\!]$: g'' est continue sur $[x_{2,j}; x_{2,j+1}]$, dérivable sur $]x_{2,j}; x_{2,j+1}[$, $g''(x_{2,j}) = g'(x_{2,j+1})$, et donc par le théorème de Rolle on a : $\exists x_{3,j} \in]x_{2,j}; x_{2,j+1}[\ g^{(3)}(x_{2,j}) = 0$

Si $n = 3$ on s'arrête, sinon ...

Par itération, obtient $\xi = x_{n+1,0}$ tel que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$
Mais P_n est de degré au plus n, donc sa dérivée $n+1$ ième est nulle.
De plus $\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$ est de degré $n+1$, donc pour obtenir sa dérivée $n+1$ ième, il suffit de dériver son terme de degré $n+1$, qui est ici t^{n+1} dont la dérivée $n+1$ ième est $(n+1)!$
Alors : $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - A(n+1)!$ et évalué en $t = \xi$ on obtient :
$g^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - A(n+1)! \Rightarrow A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

Mais $A = \frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$
donc $\frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Rightarrow f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ et on a le résultat voulu.

3°) En compilant le a) et le b) on a, puisque tout les cas ont été traités :
$$\boxed{\forall x \in [a,b]\ ,\ \exists \xi \in [a,b]\ ,\ f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

4°) a) f est supposée de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ donc $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$ qui est un segment fermée borné, donc par le théorème des bornes atteintes, on peut justifier $\boxed{\text{l'existence de } M = \sup_{t \in [a,b]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|}$

4°) b) $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$
$\Rightarrow |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\left|f^{(n+1}(\xi)\right|}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x - x_i|$
On utilise alors le a) et le fait que $(x, x_i) \in [a,b]^2 \Rightarrow |x - x_i| \leq (b-a)$
On obtient : $\boxed{|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\left|M(b-a)^{n+1}\right|}{(n+1)!}}$