Chapitre 6 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 6.1

a) Montrer que : $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \quad 0 \leq \frac{2}{\pi}x \leq sin(x)$
b) En déduire, par comparaison, la nature de la série $\sum sin(\frac{1}{n})$

Correction

a) On pose $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \quad f(x) = sin(x) - \frac{2}{\pi}x$
Alors f est C^∞ et $f'(x) = cos(x) - \frac{2}{\pi}$ et $f''(x) = -sin(x)$

On a donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		-	
$f'(x)$	$1 - \frac{2}{\pi} > 0$	$\searrow$	$\frac{-2}{\pi} < 0$

f' est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires $\exists \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $f'(\alpha) = 0$

On a alors :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0
$f(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0

On a donc $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geq 0$ et donc : $\frac{2}{\pi}x \leq sin(x)$
Comme on a de manière directe : $0 \leq \frac{2}{\pi}x$ alors :

$$\boxed{\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \quad 0 \leq \frac{2}{\pi}x \leq sin(x)}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et donc, par le a) : $0 \leq \frac{2}{\pi}\frac{1}{n} \leq sin(\frac{1}{n})$
Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, on a alors, par la règle de comparaison pour les séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum sin(\frac{1}{n}) \text{ est une série divergente.}}$$

Enoncé, Exercice 6.2

A l'aide d'une majoration, montrer la convergence de $\sum \frac{arctan(n+cos(n^2))}{n^2+3n+25}$

Correction

On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \frac{arctan(n+cos(n^2))}{n^2+3n+25}$

On a pour $n \geq 1$: $n^2+3+25 \geq n^2 > 0$ et donc $0 \leq \frac{1}{n^2+3n+25} \leq \frac{1}{n^2}$

Comme de plus $n \geq 1 \Rightarrow n + cos(n^2) > 0 \Rightarrow 0 \leq arctan(n + cos(n^2)) \leq \frac{\pi}{2}$

On a donc $\forall n \geq 1 \ \ 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2n^2}$
Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors par la règle de comparaison pour les séries à termes positifs $\sum u_n$ est convergente.

Bilan : $\boxed{\sum \frac{arctan(n+cos(n^2))}{n^2+3n+25} \text{ est convergente}}$

Enoncé, Exercice 6.3

Etudier la convergence de $\sum(tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n})$ en utilisant la règle de l'équivalent.

Correction

Pour n au voisinage de $+\infty$: $u_n = tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$
Pour x au voisinage de 0.
$tan(x)$
$= \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Alors $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}) - \frac{1}{n} = \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$

On a donc $\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3} > 0 \\ \sum \frac{1}{n^3} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{cases}$ donc par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs :

$\boxed{\sum(tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}) \text{ est convergente}}$

Enoncé, Exercice 6.4

Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n\sqrt{ln(n)}}$

Correction

On va utiliser le théorème de comparaison série-intégrale.
On pose $\forall x > 1 \quad f(x) = \frac{1}{x\sqrt{ln(x)}}$

f est dérivable et $f'(x) = \frac{-1}{(x\sqrt{ln(x)})^2}[\sqrt{ln(x)} + x\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{ln(x)}}] = \frac{-1}{(x\sqrt{ln(x)})^2}[\sqrt{ln(x)} + \frac{1}{2\sqrt{ln(x)}}]$

On a donc $f'(x) \leq 0$ pour $x > 1$ et donc f est décroissante sur $[2; +\infty[$.

Par le théorème de comparaison série intégrale $\sum f(n)$ et $\int\limits_2^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Soit $X > 2$. On a :

$$\int\limits_2^X f(t)dt = \int\limits_2^X \frac{1}{t\sqrt{ln(t)}}dt = [2\sqrt{ln(t)}]_2^X = 2\sqrt{ln(X)} - 2\sqrt{ln(2)} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On en déduit que $\int\limits_2^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.
Par le résultat obtenu par comparaison série-intégrale on a donc

$\boxed{\sum \frac{1}{n\sqrt{ln(n)}} \text{ divergente}}$

Enoncé, Exercice 6.5

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Etudier la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = P(n)e^{-\sqrt{n}}$

Correction

$n^2 u_n = n^2 P(n) e^{-\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison exponentielle-puissance.

Donc $u_n = o(\frac{1}{n^2})$. De plus $\frac{1}{n^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par négligeabilité $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

Enoncé, Exercice 6.6

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{2^n n^2}$. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Correction

Pour $n \geq 1 u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2^n n^2}{2^{n+1}(n+1)^2} = \frac{n^2}{2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$

Donc par la règle de D'Alembert $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

Enoncé, Exercice 6.7

Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!2^k}$

On admettra (pour le moment) que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ est une série convergente dont la somme vaut $exp(1) = e$

Correction

On sait que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ est une série géométrique convergente donc la somme vaut $\frac{1}{1-\frac{-1}{2}} = \frac{3}{2}$

On utilise $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = exp(1) = e$

Le produit de Cauchy des ces deux séries absolument convergente est donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ avec :

$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{1}{(n-k)!} = u_n$

Comme les séries sont absolument convergentes, alors $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}e}$