Chapitre 6 : Séries numériques

Dans ce chapitre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1 Séries

1.1 Généralités

Définitions. *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de K. Alors, on pose :* $\forall n \geq n_0 \quad S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

La nouvelle suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ ainsi obtenue est appelée série numérique de terme général u_n. S_n est appelée somme partielle de cette série.

Remarques. *Une série peut être vue comme une suite mais cette suite est définie de manière particulière, par son terme général. On essaiera d'obtenir des informations sur la série à partir de son terme général.*
Une suite est une série particulière.

Remarque : "une suite est une série".
preuve :

1.2 Convergence, somme

Définitions. *On dit qu'une série de terme général u_n est convergente*
si et seulement si $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=n_0}^{N} u_n$ existe et est finie dans K.
Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.
Deux séries toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes sont dites de même nature.
Si la série est convergente alors on pose $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=n_0}^{N} u_n$. Cette valeur est appelée somme de la série.
On pose aussi $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum\limits_{n=n_0}^{N} u_n$, R_N qui est appelé reste d'ordre N de la série.

1.3 Exemples

1.3.1 Exemple 1

Série de terme général $u_n = (-1)^n$

1.3.2 Exemple 2

Série de terme général $u_n = exp(-n)$

1.3.3 Exemple 3

Série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$

1.4 Autre exemple : séries géométrique

Définition. *On appelle série géométrique toute série dont le terme général est celui d'une suite géométrique.*

Théorème . *Si $r \in \mathbb{C}$ alors : la série de terme général r^n est convergente $\Leftrightarrow |r| < 1$*
De plus , si $|r| < 1$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

Remarque. *Par contraposition : la série de terme général r^n est divergente $\Leftrightarrow |r| \geq 1$*

preuve :

1.5 Importance des premiers termes, notations

Théorème . *Soit une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $n_1 \geq n_0$.
Alors les séries associées aux suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(u_n)_{n\geq n_1}$ *sont de même nature.*

Remarque. *Autrement dit les premiers termes n'influent pas sur la nature de la série. Par contre, ATTENTION, ils ont une influence sur la somme.*

Notations : On notera $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

preuve :

1.6 Comportement asymptotique du terme général

1.6.1 Théorème

Théorème . *Soit une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *d'éléments de* K. *Alors :* $\sum u_n$ *convergente* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

preuve

Définition. *Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 et qui est donc divergente est dite grossièrement divergente.*

1.6.2 Contre exemple

Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, cette série est appelée série harmonique.
Alors cette série est divergente bien que son terme général tende vers 0.

preuve :

1.7 Retour sur le lien suite-série

Théorème . *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* K. *Alors :*
la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente* $\Leftrightarrow$ *la série téléscopique* $\sum(u_{n+1} - u_n)$ *est convergente*

preuve :

1.8 Linéarité de la somme

Théorème . *On considère deux suites* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *et les séries associées. Soit* $\lambda \in K$ *On a alors :*

$$\sum u_n \text{ divergente et } \sum v_n \text{ convergente } \Rightarrow \sum(u_n + \lambda v_n) \text{ divergente}$$

$$\sum u_n \text{ convergente et } \sum v_n \text{ convergente } \Rightarrow \sum(u_n + \lambda v_n) \text{ convergente}$$

De plus dans le dernier cas on a alors : $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} v_n$

Remarque. *Si les deux séries sont divergentes on ne peut rien conclure dans le cas général*

preuve :

Corollaire. *L'ensemble des séries convergente est un* K *espace vectoriel.*

Corollaire. *(Séries à valeurs complexes)*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *alors*
$\sum u_n$ *convergente si et seulement si* $\sum Re(u_n)$ *et* $\sum Im(u_n)$ *sont convergentes*
De plus, si il y a convergence alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} Re(u_n) + i \sum\limits_{n=0}^{+\infty} Im(u_n)$

preuves :

2 Technique de comparaison série-intégrale

2.1 Théorème

Théorème . *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction positive, continue par morceaux, décroissante sur* $[a; +\infty[$.
Alors : $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ *et* $\sum f(n)$ *sont de même nature.*

Remarques. *Autre formulation :* $\sum f(n)$ *converge si et seulement si* f *est intégrable sur* $[a; +\infty[$
En général $a > 0$*, voir* a *aussi grand que l'on veut car le théorème est une propriété locale au voisinage de* $+\infty$.
Si on enlève f *positive le théorème reste vrai, mais si* f *prend une valeur négative alors les divergences sont grossières et n'ont pas beaucoup d'intérêt.*

preuve :

2.2 Exemple

Exemple. $\sum \frac{1}{n(ln(n))^2}$

2.3 Application : Séries de Riemann

Définition. *On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme* $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$

Théorème . *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *alors :* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente* $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Remarques. *Par contraposition :* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *est divergente* $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$
Le cas limite est pour $\alpha = 1$ *et correspond à la série harmonique qui diverge.*
C'est comme les intégrales de Riemann en $+\infty$

3 Séries à termes positifs

3.1 Lemme préliminaire

Lemme. *Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.*

Remarque. *Convention, si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de termes positifs divergente, alors on pose* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$

preuve :

3.2 Règle de comparaison

Théorème . *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites à termes positifs.*
On suppose que : $\exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N \quad , \quad 0 \leq u_n \leq v_n$

Alors : $\sum v_n$ *est convergente* $\Rightarrow \sum u_n$ *est convergente*

De plus, si les séries convergent alors : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

Remarque. *Par contraposition :* $\sum u_n$ *divergente* $\Rightarrow \sum v_n$ *divergente*

preuve :

Exemple. $\sum \frac{exp(sin(n))}{n^2}$

3.3 Règle de l'équivalent

Théorème . *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites à termes positifs telles que :* $u_n \sim v_n$
Alors les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

preuve :

Exemple. $\sum n^2[sin(\frac{1}{n}) - sh(\frac{1}{n})]$

4 Absolue convergence

4.1 Définition

Définition. *On dit qu'une série* $\sum u_n$ *est absolument convergente si et seulement si* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Remarque. *On peut note* $\sum |u_n| < +\infty$ *si* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

4.2 Théorème

4.2.1 Enoncé

Théorème . *Soit* $\sum u_n$ *une série de nombres réels ou complexes. Alors :*
$\boxed{\sum u_n \text{ absolument convergente } \Rightarrow \sum u_n \text{ convergente}}$

Remarques. *Attention la réciproque est fausse, comme nous le verrons en exemple.*
Si la série est convergente sans être absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente (terme hors programme).

4.3 Exemples

4.3.1 Exemple 1

Série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

4.3.2 Exemple 2 : série harmonique alternée

Série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
preuve de la convergence et calcul de la somme.

4.4 Utilisation des dominées et des négligeables

Théorème . *Soit* $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ *et* $(a_n) \in [0; +\infty[^{\mathbb{N}}$ *telles que* $u_n = \underset{+\infty}{O}(a_n)$*, alors :*
$\sum a_n$ *convergente* $\Rightarrow \sum u_n$ *absolument convergente* $\Rightarrow \sum u_n$ *convergente*

Remarque. *On a le même théorème avec* $u_n = \underset{+\infty}{o}(a_n)$

preuve :

Exemple. $\sum e^{-\sqrt{n}}$

4.5 Comparaison à une série géométrique : Règle de D'Alembert

4.5.1 Théorème

Théorème . *Soit* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *une suite d'éléments de* K^**.*
Alors si $\lambda = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ *existe dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *on a :* $\begin{array}{c} \lambda < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ est convergente} \\ \lambda > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ est divergente} \end{array}$

Remarques. *Si* $\lambda = 1$ *alors on ne peut rien dire.*
La limite n'existe pas à priori.
Par convention $1 < +\infty$

preuve :

4.5.2 Exemples

Exemple 1
$\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Exemple 2
$\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n}$

Exemple 3
$\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{5^n}\binom{2n}{n}$

5 Séries alternées

5.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. Alors on dit que la série $\sum u_n$ est alternée si et seulement si $[\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n\,|u_n|]$ ou $[\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^{n+1}\,|u_n|\ ]$.

Remarque. *En fait, c'est le signe de u_n qui est alterné.*

5.2 Etude

Dans cette section on étudie la série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de limite nulle.

5.3 Théorème spécial

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle vérifiant : $\begin{cases} \text{la série } \sum u_n \text{ est alternée} \\ (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{cases}$

alors la série $\sum u_n$ **est convergente**

De plus, en posant $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$ et $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ on a :

- les suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes
- S est du même signe que u_0 et $|S| \leq |u_0|$
- On a un encadrement simple du reste : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |S - S_n| \leq |u_{n+1}|$.
- $S - S_n$ est du même signe que u_{n+1}.
- La somme de la série est comprise entre deux termes consécutifs de $(S_n)_{n\geq 0}$

5.4 Exemple

$\sum \frac{(-1)^n ln(n)}{n}$

5.5 Ordre des termes

Théorème . *Si $(u_n)_{n\in N}$ est une suite telle que $\sum u_n$ est une série absolument convergente alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne dépend pas de l'ordre des termes. On peut alors noter $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$*

preuve : HP

Remarque. *Si la série est convergente sans être absolument convergente alors l'ordre des termes peut changer la somme ! !*
Exemple : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

6 Produit de Cauchy

6.1 Définition

Définition. *Soit deux séries numériques* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$*, alors on appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série de terme générale* w_n *avec* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

Remarque. $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$

Interprétation :

6.2 Théorème

Théorème . *Soit deux séries numériques absolument convergente* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ *alors la série produit de Cauchy* $\sum w_n$ *est absolument convergente et* $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$

Remarque. *Il faut de la convergence absolue, sinon çà ne marche pas :* $(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ ....

preuve : non exigible

6.3 Application : exponentielle complexe

Théorème . $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *est convergente.*

Définition. *On pose :* $\forall z \in \mathbb{C}$, $exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
L'application exp ainsi définie est appelée exponentielle complexe

Théorème . *On a :* $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $exp(z + z') = exp(z)exp(z')$

Remarque. *Si* $z \in \mathbb{R}$ *on retrouve l'exp réelle et on retrouve l'exp vu en première année*

preuve :

7 Complément : Formule de Stirling

Théorème . $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$

preuve : (non exigible)

Sommaire