Pour le jeudi 21 novembre 2024

Devoir à la maison n°5 de Mathématiques

Code couleur :	noir	plutôt facile ou important, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (ou complément)
	rouge	assez difficile (ou si on a fait le reste)
	vert	difficile (ou si on a le temps)

On soignera particulièrement la rédaction sur les parties en noires.

EXERCICE

1°) Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{2^n}{n+n!}$

2°) Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{sin(n)}{n\sqrt{n}}$

3°) Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{sin(n)}{n2^n}$

4°) Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = sin(ln(1+\frac{1}{n})) - \sqrt{\frac{1}{1+n^2}}$

BECEAS 2023 : Une inégalité entre sommes de séries

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites réelles (indexées par $\mathbb{N}^*$) à termes strictement positifs telles que la série $\sum a_n$ converge. On pose, pour tout élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$ et pour tout entier n non nul,

$$h_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

L'objet de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum h_n$ et de comparer sa somme à celle de la série $\sum a_n$.

1. `Un premier exemple`

   On pose, dans cette question, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (a) Montrer que la série $\sum a_n$ converge et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

   (b) i. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

   ii. Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

2. `Un second exemple`

Soit q un réel de $]0,1[$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = q^{n-1}$.

(a) Indiquer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

(b) Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et prouver la majoration : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}$.

3. Soit n un entier non nul et soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux n-uplets de nombres réels.

(a) Prouver l'égalité : $\displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\Big)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \big(x_i\, y_j - x_j\, y_i\big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)$.

(b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\displaystyle\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

4. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{2k^2}$.

On s'intéressera à la monotonie de la suite de terme général $\displaystyle u_k = \frac{1}{2k^2} - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un élément de $\mathscr{E}$.

(a) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big).$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{p} h_n \leqslant 4\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\Big).$$

(c) Prouver, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} h_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{p} a_k$.

(d) En déduire la convergence de la série $\sum h_n$ et l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

6. Soit C un réel strictement positif tel que, pour tout élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant C\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

On va montrer que C est au moins égal à 2.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1 et on rappelle qu'on dispose de l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(a) Prouver l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\pi^2}{6}$.

(b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $h_n \geqslant (\alpha+1)\dfrac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$.

(c) Prouver l'égalité : $\displaystyle\lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha>1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

(d) Conclure que $C \geqslant 2$.

7. On suppose qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes réels strictement positifs dont la série $\sum a_n$ converge, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant K \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

(a) Justifier l'inégalité : $K \geqslant 1$.

On pourra utiliser le résultat de la question 2.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$g_n = \begin{cases} \dfrac{4}{2^n} & \text{si } \exists\, p \in [\![1, N]\!] \quad n = p^2 \\ \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{(g_n)^n}{(g_{n-1})^{n-1}}.$$

i. Calculer a_n pour $n > N^2 + 1$ et en déduire la convergence de la série $\sum a_n$.

ii. Prouver les inégalités : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leqslant 4 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geqslant 2N$.

(c) Établir l'égalité : $\displaystyle (g_n)^n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

(d) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $h_n \leqslant g_n$ et en déduire qu'un tel réel K n'existe pas.

EPITA 2023

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

— $\mathcal{C}^n(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
— $\mathcal{C}^{n,pm}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
— $\mathcal{C}^n_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}, 2\pi$-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
— $\mathcal{C}^{n,pm}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $\mathbb{R}, 2\pi$-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
— pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{n,pm}_{2\pi}$, on définit **sa régularisée** $\tilde{f}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \tilde{f}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$$

— on pourra dire qu'une fonction est **normalisée** lorsqu'elle sera confondue avec sa régularisée ;
— l'ensemble des fonctions normalisées de $\mathcal{C}^{n,pm}_{2\pi}$ sera noté $\tilde{\mathcal{C}}^{n,pm}_{2\pi}$.

1 Projection sur l'espace des polynômes trigonométriques

On considère l'application $\langle .,. \rangle$ définie par $\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ pour f et g dans $\mathcal{C}^{0,pm}(\mathbb{R})$.

Q1) Vérifier que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q2) $\langle .,. \rangle$ est-il un produit scalaire sur $\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$? Justifier votre réponse.

Q3) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\tilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$.

On munit $\tilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$ du produit scalaire $\langle .,. \rangle$.
On note $\|.\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par : $\forall f \in \tilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}, \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions de $\tilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$ suivantes : $c_n : t \mapsto \cos(nt)$ et $s_n : t \mapsto \sin(nt)$.
On pose $F_n = \mathrm{Vect}\,(c_0, c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(c_0, c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$ est orthogonale.

Q5) Déterminer la norme de c_n pour $n \in \mathbb{N}$ puis celle de s_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire une base orthonormée de F_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q6) Soit $f \in \tilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de $p_n(f)$, la projection orthogonale de f sur F_n.

2 Coefficients et série de Fourier

Soit f de $\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$, on définit $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ les **coefficients de Fourier** de f par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \end{cases}$$

On définit également $S(f)$ la **série de Fourier** de f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\right)$$

et $S_n(f)$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\right)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Q7) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, montrer que :
- si f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$;
- si f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0$.

Q8) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ et x un réel strictement positif. Montrer que $\underset{x \to +\infty}{lim} \int_a^b f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = 0$.

Que peut-on en déduire concernant $(a_n(f))_{n \in N}$ et $(b_n(f))_{n \in N}$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$?

3 Intégrale de Dirichlet

On définit les intégrales suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q9) Montrer que $(I_n)_{n \in N}$ est constante et que $\underset{n \to +\infty}{lim} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Q10) Montrer que $t \mapsto \dfrac{t - \sin t}{t \sin t}$ est prolongeable en une fonction de $\mathcal{C}^1\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ et préciser le prolongement.

Q11) Déterminer $\underset{n \to +\infty}{lim} (I_n - J_n)$. En déduire que $\underset{n \to +\infty}{lim} J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Q12) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

4 Théorème de Dirichlet

On fixe dans cette partie $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{1,pm}$.

Q13) Soit u un réel qui n'est pas un multiple de 2π. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

Q14) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-u)\right)}{2\sin\left(\frac{x-u}{2}\right)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

Q15) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(u+x)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u)\,\mathrm{d}u$$

Q16) Conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(u+x)+f(x-u))\ \mathrm{d}u$.

Q17) On considère la fonction h définie par :

$$\forall u \in]0,\pi], h(u) = \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \tilde{f}(x)\right)$$

Montrer que h est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

On pourra noter $f\left(x^+\right) = \underset{t\to x^+}{lim} f(t)$ et $f\left(x^-\right) = \underset{t\to x^-}{lim} f(t)$.

On admet, pour la question $Q18$) uniquement, le lemme de **Riemann-Lebesgue** :

$$\forall f \in \mathcal{C}^{0,pm}([a,b]), \underset{x\to+\infty}{lim} \int_a^b f(t)e^{ixt}\ \mathrm{d}t = 0$$

Q18) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\ \mathrm{d}u$,

puis que $S(f)(x) = \tilde{f}(x)$.