Feuille d'exercices n°19 : Chapitre 7

Exercice 170. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z = 0$.*
Trouver une base orthonormée de P.

Exercice 171. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille (u, v, w) avec $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 1)$ et $w = (-1, -1, 0)$.*

Exercice 172. *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On considère le plan P d'équation $2x + 2y - z = 0$*
Déterminer, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de p la projection orthogonale sur P et de s la symétrie orthogonale par rapport à P.

Exercice 173. *On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.*
On considère H l'hyperplan d'équation : $x + 2y - z - 3t = 0$
Déterminer la matrice relativement à la base canonique de la projection orthogonale sur H

Exercice 174. *Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien et $u \in L(E)$.*
Montrer que si $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E alors $tr(u) = \sum_{i=1}^{n} < u(e_i), e_i >$

Exercice 175. *Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien et F un sous espace vectoriel de E.*
Montrer que F admet un unique supplémentaire orthogonal.

Exercice 176. *(Inégalité de Bessell)*
Soit $(E, <, >)$ un espace préhilbertien et F un sous espace vectoriel de E de dimension finie.
On note p_F le projecteur orthogonal sur F.
Montrer que : $\forall x \in E$, $||p_F(x)|| \leq ||x||$

Exercice 177. $\star$
Soit $(E, <>)$ un espace préhilbertien réel.
Une famille de vecteurs $(x_0, x_1, x_2, ..., x_p)$ est obtusangle si : $\forall (i, j) \in [\![0; p]\!] \quad i \neq j \Rightarrow < x_i, x_j >< 0$
a) On suppose que la famille $(x_0, x_1, x_2, ..., x_p)$ est obtusangle. Prouver que $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est libre.
b) En déduire que si E est euclidien de dimension n, alors toute famille obtusangle a u plus $n + 1$ vecteurs.

Exercice 178. *Soit $E = M_{2,1}(\mathbb{R})$,$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.*
Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur E tel que (u, v) soit une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Exercice 179. $\star$
Soit E un espace vectoriel euclidien, et p un projecteur de E. Montrer que :
p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, on a $||p(x)|| \leq ||x||$