Feuille d'exercices n°18 : Chapitre 7

Exercice 160. *Soit* $E = M_{2,1}(\mathbb{R})$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ *et* $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in E$. *On pose :* $< X, Y >= 5xx' + 2yy' + 2xy' + 2x'y$
a) Déterminer la matrice symétrique $A \in M_2(\mathbb{R})$ *telle que* $< X, Y >= X^T AY$
b) Montrer que $<, >$ *définit un produit scalaire sur* E.

Exercice 161. *Soit* $E = C^0([0; 1])$. *On pose* $\forall f, g \in E \quad < f, g >= \int\limits_0^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$
Montrer que $(E, <, >)$ *est un espace préhilbertien réel.*

Exercice 162. *Soit* $E = \mathbb{R}_2[X]$.
On pose $\forall (P, Q) \in E^2 \quad < P, Q >= P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P'(0)Q'(0)$
Montrer que $(E, <, >)$ *est un espace euclidien.*

Exercice 163. *Soit* $E = M_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\forall A, B \in E \;\; tr(A^T B) \leq \sqrt{tr(A^T A) tr(B^T B)}$

Exercice 164. *Démontrer, en utilisant le produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$, *que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i\sqrt{i} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

Exercice 165. *Soit* $[a; b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$, f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a; b]$.
Montrer que : $(\int_a^b f(t)g(t)dt)^2 \leq (\int_a^b f(t)^2 dt)(\int_a^b g(t)^2 dt)$

Exercice 166. *Soit* $(E, <, >)$ *un espace préhilbertien réel et* $||.||$ *la norme associée à* $<, >$.
Montrer que : $\forall x, y \in E \;,\; ||x|| + ||y|| \leq \sqrt{2} max(||x + y||\,, ||x - y||)$

Exercice 167. *Soit* $p, q \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$.
Montrer que : $ker(A) = ker(A^T A)$.

Exercice 168. *Soit* $(E, <, >)$ *un espace préhilbertien réel et soit* A *et* B *deux sous espaces vectoriels de* E.

Démontrer que : $\begin{cases} a)\; A \cap A^\perp = \{0_E\} \\ b)\; A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp \\ c)\; (A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp \\ d)\; (A^\perp + B^\perp) \subset (A \cap B)^\perp \end{cases}$

Exercice 169. *On considère* $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ *muni du produit scalaire défini par :*
$\forall (f, g) \in E^2 \;\; (f|g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$
Soit $F = \{f \in E \;,\; f(0) = 0\}$.
a) Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* E, *et trouver un supplémentaire de* F *dans* E.
b) Soit $g \in F^\perp$. *Montrer que :* $\int\limits_0^1 t(g(t))^2 dt = 0$
c) Montrer que : $F^\perp = \{0_E\}$ *et en déduire que* $F^\perp$ *n'est pas supplémentaire de* F *dans* E.