Chapitre 7 : Espaces préhilbertiens réels ; Espaces euclidiens

Chapitre de révisions qui fait partie du programme de première et de deuxième année. Dans ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension quelconque (y compris infinie et sauf mention contraire).

1 Produit scalaire

1.1 Produit scalaire

Définitions. *On dit qu'une application $<,>$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si et seulement si $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$:*

1. $< x, y + \lambda z >=< x, y > +\lambda < x, z >$
2. $< x, y >=< y, x >$
3. $< x, x >\geq 0$
4. $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0_E$

Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<,>$ alors on dit que $(E,<,>)$ est un espace préhilbertien réel.
Si de plus E est de dimension finie alors on dit que $(E,<,>)$ est un espace euclidien.

Remarques. *On dit que $<,>$ est une forme bilinéaire symétrique. (1 pour linéaire 2 pour symétrique, 1 et 2 pour bilinéaire symétrique,4 pour définie, 3 pour positive)*
Sur un espace vectoriel il peut exister plusieurs produits scalaires.
On note parfois $x.y$ ou (x,y) ou $(x|y)$ le produit scalaire ...

1.2 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

On note $E = \mathbb{R}^n$ identifié à $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pose : $\forall (X,Y) \in E^2 \quad < X, Y >= X^T Y$
Alors : $<,>$ définie sur E un produit scalaire appelé produit scalaire canonique.

preuve :

1.3 Produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$

On note $E = M_n(\mathbb{R})$ et on pose : $\forall (A,B) \in E^2 \quad < A, B >= tr(A^T B)$
Alors : $<,>$ définit sur E un produit scalaire appelé produit scalaire canonique.

preuve :

1.4 Un produit scalaire sur $C^0([a,b])$

Soit $E = C^0([a;b])$. On pose : $\forall (f,g) \in E^2 \quad < f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$
Alors $<,>$ définit un produit scalaire sur E.

Remarque. *Par restriction on peut en déduire un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$*

preuve :

2 Norme euclidienne

2.1 Définition

Si $<,>$ est un produit scalaire sur E alors on pose : $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{<x,x>}$
On dit que $||.||$ est la **norme euclidienne** associée au produit scalaire $<,>$.

Remarques. *On gardera ces notations pour la suite du chapitre.*
Même dans un espace préhilbertien on parle de norme euclidienne.
Attention il y a des normes qui ne sont pas euclidienne, on précisera tout cela dans un prochain chapitre.
On garde ces notations pour la suite.

2.2 Première propriétés

$$\forall x \in E \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \begin{cases} ||x|| \geq 0 \\ ||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x|| \\ \forall x \in E \ , \ ||x|| = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{cases}$$

preuve :

2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

2.3.1 Théorème

$\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $|<x,y>| \leq ||x|| \, . \, ||y||$

2.3.2 preuve

2.3.3 Cas d'égalité

Lemme. $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $|<x,y>| = ||x|| \, . \, ||y|| \Leftrightarrow (x,y)$ *est liée*

2.4 Inégalité Triangulaire

2.4.1 Théorème

$\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

2.4.2 preuve

2.4.3 Cas d'égalité

Lemme. $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $||x+y|| = ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow (x,y)$ *est positivement liée*

2.5 Quelques identités

2.5.1 Identité du parallélogramme

Lemme. $\forall (x,y) \in E^2$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$

Interprétation
preuve :

2.5.2 Identités de polarisation

Théorème . *Soit* $(E,<,>)$ *un espace préhilbertien. Alors :* $\forall (x,y) \in E^2$
i) $<x,y> = \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2)$
ii) $<x,y> = \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2 - ||x-y||^2)$
iii) $<x,y> = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$

preuve :

3 Orthogonalité

3.1 Vocabulaire

Définitions. *Soit x et y deux vecteurs de E. Alors on dit que :*
x est unitaire si et seulement si $||x|| = 1$
x et y sont orthogonaux si et seulement si $< x, y >= 0$ On note ceci $x \perp y$

3.2 Famille orthogonale

3.2.1 Définitions

Définitions. *Soit $S = (x_1, x_2, .., x_n)$ une famille de E. Alors on dit que :*
S est orthogonale si et seulement si $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\forall j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow < x_i, x_j >= 0$
S est orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si S est une famille orthogonale de vecteurs unitaires

3.2.2 Théorème

Théorème . *Une famille orthogonale de vecteurs* **non nuls** *est libre.*

Corollaire. *Une famille orthonormale est libre.*

preuve :

3.3 Théorème de Pythagore

3.3.1 Théorème de Pythagore

Théorème . *Soit x et y deux vecteurs de E. Alors : $x \perp y \Leftrightarrow ||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$*

preuve :

3.3.2 Avec plus de vecteurs

Lemme. *Soit $n \geq 3$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille orthogonale de E. Alors :*
$||x_1 + x_2 + .. + x_n||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2 + .. + ||x_n||^2$

Remarques. *Attention il n'y a pas de réciproque avec n vecteurs.*
Contre-exemple : $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (0, 2)$ et $x_3 = (0, -1)$

3.4 Orthogonal d'une partie ou d'un sous espace vectoriel

3.4.1 Définition

Définition. *Soit X une partie de E alors on pose : $X^\perp = \{x \in E \ , \ \forall y \in X \ \ < x, y >= 0\}$*

Remarques. *Cette définition s'applique en particulier à un sous espace vectoriel de E.*
On a en fait $X^\perp = Vect(X)^\perp$

3.4.2 Propriétés

Propriété. *$X^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.*

Propriétés. *Si F est un sous espace vectoriel de E alors :*
i) $\{0_E\}^\perp = E$ ii) $E^\perp = \{0_E\}$ iii) $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ iv)$F \subset (F^\perp)^\perp$

Remarque. *Le point iii) est faux si F n'est pas un s.e.v.*

preuves :

4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

4.1 Théorème

Théorème . *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*
si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ *est une famille libre de* E *alors il existe une famille orthonormale de vecteurs non nuls* $(u_1, u_2, ..., u_n)$ *de* E *telle que :* $\forall k \in [\![1..n]\!]$, $Vect(u_1, ..., u_k) = Vect(e_1, ..., e_k)$

Remarques. *On a le même théorème avec "orthogonale"*
En particulier : $Vect(u_1, ..., u_n) = Vect(e_1, ..., e_n)$ *et* $(u_1, ..., u_n)$ *est une base orthonormale de* $Vect(e_1, ..., e_n)$

4.2 preuve

4.3 Algorithme de Schmidt

La famille $(u_1, .., u_n)$ se construit par itérations en posant : $\begin{cases} & u_1 = \frac{e_1}{||e_1||} \\ \forall k \geq 2 \ , & u_k = \frac{e_k - \sum\limits_{p=1}^{k-1} <e_k, u_p> u_p}{\left|\left| e_k - \sum\limits_{p=1}^{k-1} <e_k, u_p> u_p \right|\right|} \end{cases}$

Remarques. $\sum\limits_{p=1}^{k-1} < e_k, u_p > u_p$ *est le projeté orthogonale de* e_k *sur* $Vect(u_1, ..., u_{k-1})$ *(cf 5.)*
On dit que l'on applique l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

4.4 Application aux espaces euclidiens

Théorème . *Tout espace euclidien admet une base orthonormée.*

Remarque. *De la même manière, tout sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien admet une base orthonormale.*

Théorème . *(Théorème de la base orthonormée incomplète)*
Si $(e_1, ..., e_k)$ *est une famille orthonormale de vecteurs non nuls alors il existe* $(e_{k+1}, .., e_{dim(E)}) \in E^{dim(E)-k}$ *telle que* $(e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_{dim(E)})$ *soit une base orthonormale de* E.

4.5 Calculs dans une base orthonormée d'un espace euclidien

Théorème . *Soit* $(E, <, >)$ *un espace euclidien et* $B = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base orhonormée de* E. *Alors :*
Tout vecteur x *de* E *peut s'écrire dans* B *sous la forme :* $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ *avec* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Les coordonnées de x *dans* B *sont donc* $Mat_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Soit $(x, y) \in E^2$. *On note* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *les coordonnées de* x *dans* B *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *les coordonnées de* y *dans* B.

Alors : $< x, y >= \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T Y$ *et* $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{X^T X}$

Remarque. *On retrouve, à un changement de base près, le produit scalaire canonique.*

preuve :

5 Théorème de projection orthogonale

5.1 Théorème

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors :
i) $E = F \oplus F^\perp$

ii) On peut définir p_F le projecteur orthogonal sur F par :

$\forall x \in E$ alors $p_F(x) = y$ où y est l'unique vecteur tel que $\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$

iii) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de F alors : $\forall x \in E \ , \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i$

iv) Pour tout x de E le vecteur projeté $p_F(x)$ est la meilleure approximation de x dans F, c'est-à-dire que : $d(x, F) = \min_{y \in F} ||x - y|| = ||x - p_F(x)||$
De plus $P_F(x)$ est le seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = ||x - y||$

Remarques. *p_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*
Si $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base quelconque (pas forcément orthonormée) de E alors $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k$ avec $(x'_1, \ldots, x'_n)$ solution du système : $\forall i \in [\![1; n]\!] \ , \ < x - p_F(x), e'_i >= 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x'_k < e'_k, e'_i >=< x, e'_i >$

preuve :

5.2 Supplémentaire orthogonale

5.2.1 Définition

Définition. *Soit F et G deux sous espaces vectoriels de $(E, <,>)$.*
Alors, on dit que F et G sont orthogonaux si et seulement si $\forall (f, g) \in F \times G \ , \ < f, g >= 0$
On note ceci $F \perp G$.

5.2.2 Supplémentaire orthogonaux

Si F et G sont orthogonaux alors $F + G = F \oplus G$, si de plus $F \oplus G = E$ alors on dit que :
F et G sont supplémentaire orthogonaux.
On note ceci $F + G = F \oplus^\perp G$.

5.2.3 Cas particulier

Lemme. *Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie de E alors : $E = F \oplus^\perp F^\perp$*

Remarque. *C'est un corollaire du théorème de projection orthogonale.*

Corollaire. *Si F est un sous espace vectoriel d'un espace euclidien E alors :*
$dim(F^\perp) + dim(F) = dim(E)$ et $E = F \oplus^\perp F^\perp$

5.2.4 Cas général

Si F n'est pas de dimension finie, on a seulement $F \oplus F^\perp \subset E$ et il n'y a pas forcément égalité.

Exemple. *Dans $E = C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire vu en 1.4. $(\mathbb{R}[X])^\perp = \{0_E\}$ ...*

5.3 Hyperplan

5.3.1 Représentation d'une forme linéaire

Théorème . *Soit* ϕ *une forme linéaire d'un espace* **euclidien** $(E, <,>)$. *Alors :*
il existe un unique $u \in E$ *tel que* $\forall x \in E$, $\phi(x) =< u, x >$

preuve :

5.3.2 Caractérisation des hyperplans d'un espace euclidien

Lemme. *Soit* $(E, <,>)$ *un espace euclidien. Alors :*
tout hyperplan H *de* E *s'écrit sous la forme* $H = \{u\}^{\perp}$ *avec* $u \in E \backslash \{0_E\}$

preuve :

5.3.3 Vecteur normal à un hyperplan

Lemme. *Soit* $(E, <,>)$ *un espace euclidien,* $B = (e_1, \dots, e_n)$ *une base orthonormée de* E *et* H *un hyperplan de* E. *Alors :*
si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ *est une équation cartésienne de* H *dans* B, *le vecteur* a *de coordonnées* $(a_1, \dots, a_n)$ *dans* B *est un vecteur normal à* H.

preuve :

5.3.4 Distance à un hyperplan

Théorème . *Soit* $(E, <,>)$ *un espace euclidien, et* u *un vecteur non nul de* E.
On note H *l'hyperplan :* $H = \{u\}^{\perp}$

$$\text{Alors : } \forall x \in E \ , \ \begin{cases} \textit{le projeté orthogonal de } x \textit{ sur } Vect(u) \textit{ est } \frac{<x,u>}{||u||^2}u \\ \textit{le projeté orthogonal de } x \textit{ sur } H \textit{ est } x - \frac{<x,u>}{||u||^2}u \\ d(x, H) = \frac{|<x,u>|}{||u||} \end{cases}$$

preuve :

5.3.5 Applications : distance à une droite dans $\mathbb{R}^2$ et distance à un plan dans $\mathbb{R}^3$

Sommaire