Feuille d'exercices n°23 : Chapitre 8

Exercice 202. *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

a) Montrer que $f(0) = 0$
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = nf(1)$
c) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z} \quad f(m) = mf(1)$
d) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = rf(1)$
e) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(r) = rf(1)$

Exercice 203. $\star$
Soit $E = C^0([0,1])$. On pose $\forall f \in E \ \varphi(f) = f(1)$ et $\Phi(f) = \int\limits_{[0;1]} f$
On considère les deux normes (admis) sur E définies par
$\forall f \in E \ N_\infty(f) = \sup\limits_{[0;1]} |f(t)|$ *et* $N(f) = \int\limits_0^1 |f(t)|\,dt$
φ et Φ sont-elles continues de (E, N_∞) dans $\mathbb{R}$?
φ et Φ sont-elles continues de (E, N) dans $\mathbb{R}$?

Exercice 204. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ $n+1$ réels distincts.*
On pose $\forall P \in E \ N(P) = \max\limits_{i \in [\![0;n]\!]} |P(a_i)|$
a) Montrer que N est une norme sur E.
b) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et soit $P \in E$
Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} P_k = P \Leftrightarrow \forall i \in [\![0;n]\!]\ ,\ \lim\limits_{k\to+\infty} P_k(a_i) = P(a_i)$

Exercice 205. *Trouver des équivalents en $+\infty$ de $u_n = 1,001^n + n^{10^6}$, $v_n = ln(n^2 + 7n + 127)$, $w_n = n^{100} + n!$, $x_n = 10^n + n!$, $y_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 + n + 1}$ et $z_n = arcos(1 - \frac{1}{n})$*

Exercice 206. *($\star$)*
Donner un équivalent de $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k!$

Exercice 207. *Soit $(a,b) \in [0;+\infty[^2$*
On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$
Etudier ces deux suites.

Exercice 208. *Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n}$*

Exercice 209. *Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = sin(u_n)$*