Feuille d'exercices n°22 : Chapitre 8

Exercice 192. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé.*
a) Montrer que tout ouvert est une union de boules ouvertes.
b) Montrer que si F est un sous espace vectoriel de E alors $\overline{F}$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 193. $\star$
Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On suppose que F est un sous espace vectoriel de E ouvert. Montrer que $F = E$.

Exercice 194. *Montrer que l'intérieur et l'adhérence ($\star$) d'une partie convexe sont convexes.*

Exercice 195. $\star\star$
Soit (E, N) un espace vectoriel normé.
Si A est un partie de E on pose $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \backslash A}$ (frontière de A).
a) Quelles sont les parties A de E vérifiant $\partial A = \emptyset$?
b) Quelles sont les parties de E qui sont à la fois des ouverts et des fermés de E ?

Exercice 196. *Etudier* $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$ *avec* $A_n = \begin{pmatrix} (1+\frac{1}{n})^n & \frac{sin(n)}{n} \\ exp(-n) & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 197. *Etudier* $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$ *avec* $A = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *ou* $\lambda > 0$

Exercice 198. *On considère les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 1 < x < y\}$
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} 1 \leq x \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \}$ $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2 + y^4 = 1\}$
Dire si ces parties sont ouvertes ou fermés et démontrer vos affirmations.

Exercice 199. *Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E, N). On note d la distance associée à N.*
Pour $x \in E$ on pose $d(x, A) = \inf\limits_{A \in A} d(x, a)$
a) Montrer que $d(x, A)$ est bien définie.
b) Montrer que l'application δ définie de E dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in E \ \delta(x) = d(x, A)$ est 1 lipschitzienne.
c) On suppose de plus que A est fermé.
Montrer alors que $\forall x \in E \ \ d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$

Exercice 200. *Montrer que l'application* $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{3x^2y + 2y^3}{x^2+y^2} \ si \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \ si \ (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$ *est continue en* $(0, 0)$

Exercice 201. *Montrer que l'application* $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \ si \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \ si \ (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$ *n'est pas continue en* $(0, 0)$