Feuille d'exercices n°21 : Chapitre 8

Exercice 182. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé.*
a) Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2$, (x,y) positivement liée $\Rightarrow N(x+y) = N(x) + N(y)$
b) Donner dans $\mathbb{R}^2$ (et avec une norme usuelle) un contre exemple à la réciproque du a).

Exercice 183. *Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\sum u_n$ est convergente$\}$.*
On pose $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $N(u) = \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{n!}}$
Montrer que N est est une norme sur E.

Exercice 184. *Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés.*
Montrer que : $\begin{array}{cccc} N & : & E \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (e,f) & \mapsto & Max(N_E(e), N_F(f)) \end{array}$ *est une norme sur $E \times F$*

Exercice 185. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\forall P \in E$ $N(P) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |P(t) - P'(t)|$*
Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 186. *Soit n un entier supérieur ou égale à 2.*
Existe-t-il une norme N sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A, B \in E$, $N(AB) = N(BA)$?

Exercice 187. *Soit $E = \mathbb{R}^2$. On pose $\forall X = (x,y) \in E$, $N(X) = Max(|x|, |x+2y|)$*
a) Montrer que N est une norme sur E.
b) Dessiner la boule unité correspondant à cette norme.
c) Trouver $(a,b) \in]0;+\infty[^2$ tel que : $\forall X \in E$, $a\,||X||_\infty \leq N(X) \leq b\,||X||_\infty$ avec a le plus grand possible et b le plus petit possible.

Exercice 188. *Soit $E = C^1([0;1], \mathbb{R})$. On pose $\forall f \in E$ $N(f) = \sqrt{\int\limits_0^1 f'(t)^2 dt + f(1)^2}$*
Est-ce que N est une norme sur E ?

Exercice 189. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = M_n(\mathbb{R})$. On pose pour $A = (a_{i,j}) \in E$ $N(A) = \sup\limits_{i\in[\![1;n]\!]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$*
a) Montrer que N est une norme sur E.
b) Montrer que : $\forall (A,B) \in E^2$ $N(AB) \leq N(A)N(B)$
(On dit que l'on a une norme d'algèbre)

Exercice 190. $(\star\star)$ *(Norme p)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}^n$ et $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ $N_p(x) = (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$
Montrer que N_p est une norme sur E.

Exercice 191. $(\star\star)$ *(Norme p)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = C^0([0;1])$ et $\forall f \in E$ $N_p(x) = (\int\limits_0^1 |f(t)|^p)^{\frac{1}{p}}$
Montrer que N_p est une norme sur E.