Feuille d'exercices n°20 : Chapitre 7

Exercice 180. Un petit problème ...
A) Préliminaires
a) Montrer que $\forall R \in \mathbb{R}[X]$ $\int_0^{+\infty} e^{-t}R(t)dt$ *est convergente.*

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$ $A_k = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt$ *qui est convergente d'après le a).*
b) Calculer A_0
c) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (A_k).
d) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ *la valeur de* A_k.

B) Un produit scalaire
On note $E = \mathbb{R}[X]$ *et on pose* $\forall (P,Q) \in E \quad < P,Q >= \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)dt$
On pose $F = \mathbb{R}_2[X]$.

a) Montrer que $<,>$ *définit un produit scalaire sur* E.

On note (P_0, P_1, P_2) *la base canonique de* F. *Autrement dit* $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2$ *et* $\forall t \in \mathbb{R}$ $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ *et* $P_2(t) = t^2$
b) Appliqué l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt à (P_0, P_1, P_2) *afin d'obtenir une base orthonormale de* F *que l'on notera* (Q_0, Q_1, Q_2)

C) Une projection orthogonale
On pose $R = X^3$ *de tel sorte que :* $\forall t \in \mathbb{R}$ $R(t) = t^3$
a) Déterminer $R^{\perp}$ *la projection orthogonale de* R *sur* F.
b) Calculer la distance de R *à*F.

D) Une minimisation
On pose $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad f(a,b,c) = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt}$
a) Interpréter $f(a,b,c)$ *à l'aide de la norme associée à* $<,>$.
b) Montrer que f *atteint son minimum sur* $\mathbb{R}^3$ *et calculer ce minimum.*

Exercice 181. *Soit* $E = \mathbb{R}^5$ *muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Soit le vecteur $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ *et le sous espace vectoriel* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in E \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}$

On cherche à calculer la distance d *de* A *à* F.
a) Ecrire F *sous forme de* $Vect$ *et en déduire la dimension de* F *et de* $F^{\perp}$.
b) Trouver une base de $F^{\perp}$.
c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base trouvée au b).
d) Déterminer A' *la projection orthogonale de* A *sur* $F^{\perp}$.
e) Calculer d.