PSI* 2024-2025

Pour le jeudi 28 novembre 2024

Devoir à la maison n°6 de Mathématiques

Code couleur :	noir	plutôt facile ou important, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (ou complément)
	rouge	assez difficile (ou si on a fait le reste)
	vert	difficile (ou si on a le temps)

On soignera particulièrement la rédaction sur les parties en noires.

EXERCICE n°1

Soit $n \geq 2$ et $E = M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $<,>$ définit par :
$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ , \ < A, B >= tr(A^T B)$

On note $S_n = \{M \in E \ , \ M = M^T\}$ et $A_n = \{M \in E \ , \ M = -M^T\}$.

1°) Montrer que S_n et A_n sont en somme directe orthogonale.

On considère désormais $n = 2$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

2°) a) Déterminer H la projection orthogonale de M sur S_n.

2°) b) Déterminer la distance de M à A_n.

EXERCICE n°2

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et $\forall a \in [0; +\infty[\ \forall P \in E \ , \ N_a(P) = |P(a)| + \int\limits_0^1 |P'(t)| \, dt$
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $Q_n = X^n$.

1°) Montrer que N_a est une norme sur E.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $N_a(Q_n)$

3°) Dans cette question on suppose que $a < b$ et que $b > 1$.

En utilisant le 2°) et en calculant $\frac{N_a(Q_n)}{N_b(Q_n)}$ montrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

4°) Montrer que si $(a, b) \in [0; 1]^2$ alors N_a et N_b sont équivalentes.

EXERCICE n°3

On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions : $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & nxsin(x)e^{-nx} \end{array}$

1°) Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

2°) a) Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $\varphi : t \mapsto te^{-t}$

2°) b) Soit $a > 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

3°) a) Montrer que les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f_n'(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$.

3°) b) Montrer que, pour $n \geq 1$ et $x \in]0, \frac{1}{n}]$, $f_n'(x) > 0$

3°) c) Pour $n \geq 1$, montrer que, sur l'intervalle $]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}]$, f_n' s'annule en un unique point x_n.

3°) d) Pour $n \geq 1$, en déduire les variations de f_n sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$

3°) e) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

4°) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$