Feuille d'exercices n°26 : Chapitre 11

Exercice 222. *Soit la suite de fonctions* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*
$\forall n \geq 1 \ , \forall t \in [0,1] \ , \ u_n(t) = n^2(1-t)t^n - (n-1)^2 t^{n-1}(1-t)$
a) Montrer que : $\forall n \geq 1 \ , \forall t \in [0,1] \ , \ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(t) = n^2(1-t)t^n$
b) Montrer que la série de fonction $\sum u_n$ *converge simplement sur* $[0,1]$ *vers la fonction nulle.*
c) Comparer les valeurs : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int\limits_0^1 u_k(t)dt$ *et* $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(t))dt$

Exercice 223. *Montrer que la série de fonctions :* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{nxe^{-nx}}{n^2+1}$ *converge normalement sur son domaine.*

Exercice 224. *Étude de la fonction* $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2t^2}$ *: ensemble de définition, variations, limites, continuité, classe* C^1*,intégrabilité sur* $]0,+\infty[$.

Exercice 225. *Pour* $x > 0$ *on pose :* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$
a) Montrer que S *est bien définie et est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Montrer que : $\forall x > 0 \ , \ S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$
d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ *en* 0^+
e) Déterminer un équivalent de $S(x)$ *en* $+\infty$

Exercice 226. *Pour* $x > 0$ *on pose :* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$
a) Justifier que S *est continue et définie sur* $]0,+\infty[$
b) Trouver une relation liant $S(x)$ *et* $S(x+1)$
c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ *en* 0 *et en* $+\infty$

Exercice 227. *On définit, pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, la fonction :* $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{n^2+2n+x^2} \end{array}$

1°) Montrer que la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$.

2°) En admettant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$*, calculer* $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+x^2}$

Exercice 228. *(⋆)*
Soit $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *de longueur non nul. Soit* $f_0 \in C^0([a,b],\mathbb{R})$.
On pose alors $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in [a,b] \ , \ f_{n+1}(x) = \int\limits_a^x f_n(t)dt$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement sur* $[a,b]$*. On note* $F = \sum\limits_{n\geq 0} f_n$

b) Justifier l'existence et le caractère C^1 *sur* $[a,b]$ *de* $G : x \mapsto \int\limits_a^x F(t)dt$

c) A l'aide d'une équation différentielle vérifiée par G*, déterminer* F *en fonction de* f_0