Feuille d'exercices n°25 : Chapitre 10 et 11

Exercice 218. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par :*
$\forall x \in [0, +\infty[\ ,\ f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n \ si\ x \in [0, n[\\ 0\ si\ x \geq n \end{cases}$

a) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.

b) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[\ 0 \leq f_n(x) \leq f(x)$

On pose $\forall x \in [0, +\infty[\ \Delta_n(x) = f(x) - f_n(x)$

c) Trouver une majoration simple de Δ_n sur $[n, +\infty[$

d) Calculer $\Delta'_n(x)$ sur $[0, n[$

e) Montrer que sur $[0, n[$, $\Delta'_n(x)$ est du même signe que $\varphi_n(x)$ avec $\varphi_n(x) = (n-1)ln(1-\frac{x}{n}) + x$

f) Etudier la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et montrer qu'elle est bornée.

g) Etudier φ_n sur $[0, n[$

h) Montrer que : $||\Delta_n||_\infty = \sup\limits_{[0,+\infty[} |\Delta_n(t)| \leq Max(\frac{M}{n}, e^{-n})$ avec M une constante.

i) Montrons que la convergence de f_n vers f est uniforme sur $[0, +\infty[$

Exercice 219. *a) Déterminer le domaine de définition de $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$*

b) Déterminer le domaine de définition de $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}}$

Exercice 220. *On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n(t) = t^n$ et on considère la série de fonctions $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.*
a) Donner le domaine de définition de S.
b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[-a, a]$ avec $a \in]0, 1[$
c) La convergence est-elle uniforme sur le domaine de S ?

Exercice 221. *On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}$ et on considère la série de fonctions $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.*
Etudier la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence normale de $\sum u_n$