Feuille d'exercices n°24 : Chapitre 10

Exercice 210. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^n ln(t) \end{array}$

a) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
b) Etudier la fonction f_n *sur* $[0,1]$
c) Montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est uniforme sur* $[0,1]$.

Exercice 211. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x}{n(1+x^n)} \end{array}$
Montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est uniforme sur* $[0,+\infty[$

Exercice 212. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $f_n(x) = nsin(x)cos^n(x)$
a) Etudier la convergence simple sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ *de la suite de fonctions* (f_n).
b) Calculer $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$.
c) Que peut-on déduire du b) sur la convergence uniforme de (f_n) *sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *?*
d) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclu dans $]0,\frac{\pi}{2}]$

Exercice 213. *Etudier la suite de fonctions définies par* $f_n(x) = \frac{nx^2e^{-nx}}{1-e^{-x^2}}$
(convergence simple et convergence uniforme)

Exercice 214. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions décroissantes convergeant simplement vers la fonction nulle sur* $[0,1]$.
Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 215. *($\star$)*
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions polynomiales de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
On suppose que cette suite converge uniformément vers f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
Montrer que f *est une fonction polynômiale.*

Exercice 216. *On définit une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$*, en posant :*
$\forall x \in [0,1]$, $u_0(x) = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1}(x) = 1 + \int\limits_0^x u_n(t-t^2)dt$

a) Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $0 \le u_{n+1}(x) - u_n(x) \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

b) Etablir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *vers une fonction u vérifiant :*
$u'(x) = u(x-x^2)$

Exercice 217. *($\star$)*
Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nt}{1+n^2t^4}dt$.