Exemples du chapitre 10 : Suites de fonctions

Exemples de convergences simples

Exemple 1.1.2.(1)

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\begin{array}{rccl} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^n \end{array}$

Exemple 1.1.2.(2)

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $\begin{array}{rccl} f_n & : & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} (1-\frac{t^2}{n})^n & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \end{cases} \end{array}$

Exemple 1.1.2.(3)

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\begin{array}{rccl} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x+n}{n+4nx^2} \end{array}$

Exemples de convergences uniformes

Exemple 1.4.(1)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{array}{rccl} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^n \end{array}$

a) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$
b) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.
c) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$

Exemple 1.4.(2)

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\begin{array}{rccl} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x+n}{n+4nx^2} \end{array}$
converge uniformément sur $[0,1]$

Exemple 1.4.(3)

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\begin{array}{rccl} f_n & : &]0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{1}{t}+\frac{1}{n} \end{array}$ convergence uniformément sur $]0,1]$

Exemple 1.4.(4)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\begin{array}{rccl} f_n & : & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0,\frac{1}{n}[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{n},+\infty[\end{cases} \end{array}$

a) Etudier la convergence simple sur $[0,+\infty[$.
b) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a;+\infty[$ (avec $a > 0$.
c) Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0;+\infty[$.

Exemple 1.4.(5)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\begin{array}{rccl} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & Min(n,\frac{x^2}{n}) \end{array}$

Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $[-A,A]$ (avec $A > 0$), mais pas qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Continuité

Exemple 2.2.3.(1)

Etudier la continuité de la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^n \end{array}$

Exemple 2.2.3.(2)

Etudier la continuité de la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{t}+\frac{1}{n} & \text{si } t\neq 0 \\ 0 & \text{si } t=0 \end{cases} \end{array}$

Exemple 2.2.3.(3)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & exp(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{cos(\sqrt{2k}x)}{k^2}) \end{array}$

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on notera f.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Intégration sur un segment

Exemple 3.1.2.(1)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & n^2(1-t)t^n \end{array}$

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction que l'on notera f.
b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(t)dt$ et $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$
c) Que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0,1]$?

Exemple 3.1.2.(2)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & (1-\frac{t}{n})^n \end{array}$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(t)dt$

Dérivabilité

Exemple 3.2.(1)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{sin(nt)}{\sqrt{n}} \end{array}$

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ et que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas simplement.

Exemple 3.2.(2)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{cos(kx)}{k^5} \end{array}$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction de classe C^1 dont on donnera un expression.

Classe C^k

Exemple 3.3.(1)

Suite de l'exemple3.2.(2)